簡易斜座標系與直角座標系間的線性轉換

邱辛幸

前　言

本文在敍述一種座標系——兩基底向量間的夾角不一定爲直角——稱爲斜座標系；利用直角座標系中的向量運算方法，可決定任意三角形或平行四邊形分割出的面積比率，同直線上的線段或平行兩向量的長度比率，與“孟氏定理”有異曲同工之妙。

一、直角座標系中之分點關係

因爲斜座標系中，分割線上的座標點，須藉分點公式求得，故於此首先描述關於直角座標系中的分點關係。以一三角形，ΔOAB（見圖一）爲例，若知道此三角形之兩邊向量，$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$，在直角座標系中（S；$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$）爲 $\overrightarrow{OA}=(a_1, b_1)$，$\overrightarrow{OB}=(a_2, b_2)$；其中，稱 $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,1)$ 爲兩基底向量，且 $\overrightarrow{e_1}$ 垂直 $\overrightarrow{e_2}$，即 S 系爲直角座標系，故 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 亦表爲

$$\overrightarrow{OA}=a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}$$
$$\overrightarrow{OB}=a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}$$

利用向量平移原理，將 O 點平移至（S；$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$）之原點，則 ΔOAB 中 O，A，B 三點三座標即爲：

$$O(0,0)$$
$$A(a_1, b_1)$$
$$B(a_2, b_2)$$

假設 $P(x,y)$ 點爲 ΔOAB 內部任意點，則位置向量（position vector）$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，將 $\overrightarrow{OP}$ 射線延長，將交 $\overline{AB}$ 於 Q，若 Q 將 $\overline{AB}$ 分成 $\overline{AQ}$, $\overline{QB}$ 之長度比率爲 m/n，且 $\overline{OP}=k\,\overline{OQ}$，$(m, n, k\in R^+)$，即 $\overrightarrow{OP}=k\,\overrightarrow{OQ}$。

由向量關係：

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}$$
$$=\overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}$$

又　$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

所以　$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\dfrac{n}{m+n}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

因爲$\overrightarrow{OP}=k\,\overrightarrow{OQ}$，可求出$\overrightarrow{OP}$爲

$$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{kn}{m+n}(a_1,\ b_1)$$

$$+\frac{km}{m+n}(a_2,\ b_2)$$

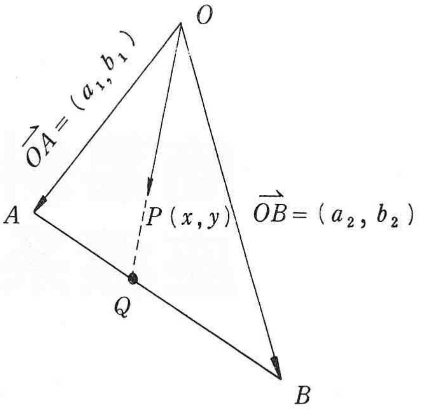
$$=\left(\frac{k(na_1+ma_2)}{m+n},\right.$$

$$\left.\frac{k(nb_1+mb_2)}{m+n}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

O點爲S座標系中之原點，所以$P(x,y)$點的座標爲：

$$P(x,y)$$

$$=P\left(\frac{k(na_1+ma_2)}{m+n},\ \frac{k(nb_1+mb_2)}{m+n}\right)$$



$\overline{AQ}/\overline{QB}=m/n$

$\overline{OP}=k\,\overline{OQ}$

$m,\ n,\ k\in R^+$

圖一

二、建立斜座標系：$(S',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'})$

此種斜座標系，依照三角形或平行四邊形的幾何形狀而設定；例如，將圖一的三角形OAB 的三頂點O，A，B視爲O', A', B'，見圖二，而且令

$$\overrightarrow{O'A'}=\overrightarrow{e_1'}=(1,0)'$$

$$\overrightarrow{O'B'}=\overrightarrow{e_2'}=(0,1)'$$

其中，$\overrightarrow{e_1'}$，$\overrightarrow{e_2'}$即爲S' 座標系中的兩基底向量，但$\overrightarrow{e_1'}$，$\overrightarrow{e_2'}$不一定互相垂直，除非原先ΔOAB的$\overrightarrow{OA}$垂直$\overrightarrow{OB}$。由於圖一與圖二互相對應，故$P'(x',\ y')'$即爲$P(x,y)$點，Q'即爲Q點，而且

$$\overline{A'Q'}/\overline{Q'B'}=m/n$$

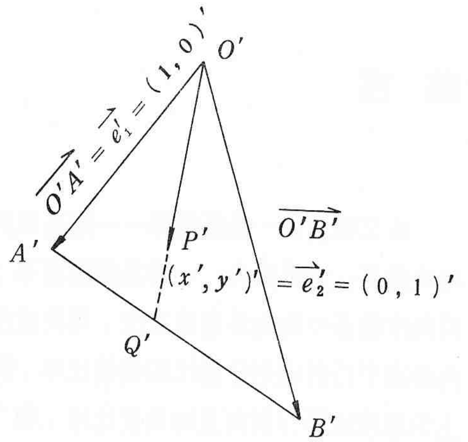
$$\overline{O'P'}=k\,\overline{O'Q'}$$

(m，n，$k\in R^+$，如前定義)

任取S' 座標系中兩向量，

$$\overrightarrow{O'u'}=(\alpha_1,\ \beta_1)'$$

$$\overrightarrow{O'v'}=(\alpha_2,\ \beta_2)'$$



$\overline{A'Q'}/\overline{Q'B'}=m/n$

$\overline{O'P'}=k\,\overline{O'Q'}$

$m,\ n,\ k\in R^+$

圖二

定義： S'系中的向量，有三種運算方式與S系中的運算方式相同。

1. 向量的相加減及係數積運算：

①$\overrightarrow{O'u'}+\overrightarrow{O'v'}=\overrightarrow{O'v'}+\overrightarrow{O'u'}$

②$\overrightarrow{O'u'}-\overrightarrow{O'v'}=\overrightarrow{v'u'}$

③$\overrightarrow{O'u'}+\overrightarrow{O'v'}$

$$=(\alpha_1,\ \beta_1)'+(\alpha_2,\ \beta_2)'$$

$$=(\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2)'$$

④ $\overrightarrow{O'u'}-\overrightarrow{O'v}_1=(\alpha_1-\alpha_2,\ \beta_1-\beta_2)'$

⑤ $t\cdot\overrightarrow{O'u'}=t(\alpha_1,\beta_1)'=(t\alpha_1,\ t\beta_1)'$

2. 向量的長度運算：

① $/\overrightarrow{o'u'}/$ ＝斜座標系中 $\overrightarrow{o'u'}$ 之長度定義

$$=\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}$$

② $/\overrightarrow{o'u'}+\overrightarrow{o'v'}/$

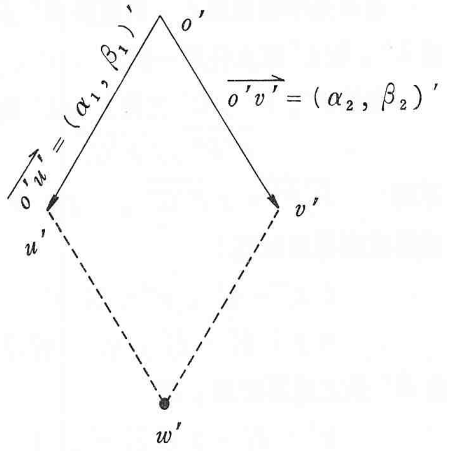
$$=\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2}$$

③ $/\overrightarrow{o'u'}-\overrightarrow{o'v'}/$

$$=\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2}$$

3. 向量所張的平行四邊形面積：

共點的兩向量 $\overrightarrow{o'u'}$，$\overrightarrow{o'v'}$ 所張的平行四邊形面積，如圖三，爲 $/A/$，則定義



平行四邊形 $o'v'w'u'$ 在 S' 系之面積大小爲 $/A/=\left|\,/\begin{matrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{matrix}/\,\right|$

圖三

$$/A/=\left|\,/\begin{matrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{matrix}/\,\right|$$

$$=|\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1|$$

式中，"//"表 S' 系中量的大小

"||"表示取正值。

三、定義 S 與 S' 間的線性向量轉換

定義：$[\vec{S}]=[\vec{S'}]\cdot[f]$，式中

$\vec{S}$ 表 S 系中任意向量

$\vec{S'}$ 表 S' 系中，原 S 中 $\vec{S}$ 的對應向量，

$[f]$ 表二維轉換矩陣。

上式式子的運算方向，爲一般矩陣之運算方式。

由 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 與 $\overrightarrow{O'A'}$，$\overrightarrow{O'B'}$ 之轉換式如下：

$$[\overrightarrow{OA}]=[\overrightarrow{O'A'}][f]$$

$$[\overrightarrow{OB}]=[\overrightarrow{O'B'}][f]$$

或 $$\begin{bmatrix}\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OB}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overrightarrow{O'A'}\\ \overrightarrow{O'B'}\end{bmatrix}[f]$$

即 $$\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}[f]$$

於此，轉換矩陣 $[f]$，即取爲

$$[f]=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$$

四、S' 系中的 $P'(x',y')'$ 點的座標

圖二中的 P' 點，爲圖一中 P 點的對應點。

因爲 $/\overrightarrow{A'Q'}///\overrightarrow{Q'B'}/=m/n$

$/\overrightarrow{O'P'}/=k/\overrightarrow{O'Q'}/$

又因前面定義之向量相加減運算關係，故 S' 系中的分點公式亦成立，即

$$\overrightarrow{O'Q'}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{O'A'}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{O'B'}$$

$$\overrightarrow{O'P'}=k\overrightarrow{O'Q'}$$

$$=\frac{kn}{m+n}\overrightarrow{O'A'}+\frac{km}{m+n}\overrightarrow{O'B'}$$

$$=\frac{kn}{m+n}(1,0)'+\frac{km}{m+n}(0,1)'$$

亦即

$$\overrightarrow{O'P'}=\left(\frac{kn}{m+n},\frac{km}{m+n}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

所以，在 $(S';\vec{e_1}',\vec{e_2}')$ 座標系中，$P'(x',y')'$ 點之座標爲

$$P'(x',y')'=P'\left(\frac{kn}{m+n},\frac{km}{m+n}\right)'$$

（因爲$\overrightarrow{O'P'}$在S'中爲位置向量）

利用$[\vec{S}]=[\vec{S'}][f]$線性轉換如下：

$$[\overrightarrow{OP}]=[\overrightarrow{O'P'}][f]$$
$$=\left[\frac{kn}{m+n},\frac{km}{m+n}\right]\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$$
$$=\left[\frac{k(na_1+ma_2)}{m+n},\frac{k(nb_1+mb_2)}{m+n}\right]$$

所以

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{k(na_1+ma_2)}{m+n},\frac{k(nb_1+mb_2)}{m+n}\right)$$

與前面由（S；$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$）直角座標系直接所得之結果，(1)式相同；亦即在此定義下，S與S'座標或向量之互相對應關係，可經由

$$[\vec{S}]=[\vec{S'}][f]$$

轉換而得。

五、S'座標系中的直線系統

假設在S系中，存在一條直線L，若此線通過$F(\xi_1,\eta_1)$與$G(\xi_2,\eta_2)$兩點，則L之方程式即爲：（在S系中）

$$(\eta_2-\eta_1)x+(\xi_1-\xi_2)y$$
$$=\xi_1(\eta_2-\eta_1)+\eta_1(\xi_1-\xi_2) \quad \cdots\cdots(3)$$

在S系中，$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{OG}$兩向量爲

$$\overrightarrow{OF}=(\xi_1,\eta_1)$$
$$\overrightarrow{OG}=(\xi_2,\eta_2)$$

由$[\vec{S}]=[\vec{S'}]\cdot[f]$轉換爲$S'$系中對應之兩向量$\overrightarrow{O'F'}$，$\overrightarrow{O'G'}$如下：

$$\begin{bmatrix}\overrightarrow{OF}\\ \overrightarrow{OG}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overrightarrow{O'F'}\\ \overrightarrow{O'G'}\end{bmatrix}\cdot[f]$$

$$\begin{bmatrix}\overrightarrow{O'F'}\\ \overrightarrow{O'G'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overrightarrow{OF}\\ \overrightarrow{OG}\end{bmatrix}\cdot[f]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{bmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_2 & -b_1\\ -a_2 & a_1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{bmatrix}\xi_1b_2-\eta_1a_2 & -\xi_1b_1+\eta_1a_1\\ \xi_2b_2-\eta_2a_2 & -\xi_2b_1+\eta_2a_1\end{bmatrix}$$

所以

$$\overrightarrow{O'F'}=\left(\frac{\xi_1b_2-\eta_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1},\frac{-\xi_1b_1+\eta_1a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)'$$

$$\overrightarrow{O'G'}=\left(\frac{\xi_2b_2-\eta_2a_2}{a_1b_2-a_2b_1},\frac{-\xi_2b_1+\eta_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)'$$

亦即，F'，G'兩點在S'系中爲

$$F'(\xi_1',\eta_1')'$$
$$=F'\left(\frac{\xi_1b_2-\eta_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1},\frac{-\xi_1b_1+\eta_1a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)'$$
$$G'(\xi_2',\eta_2')'$$
$$=G'\left(\frac{\xi_2b_2-\eta_2a_2}{a_1b_2-a_2b_1},\frac{-\xi_2b_2+\eta_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)'$$
$$\cdots\cdots(4)$$

若S系中的直線L，對應於S'系中之直線L'，取L'線上任意一點$P'(x',y')'$

由於P'，F'，G'三點共在L'線上，故

$$\overrightarrow{F'P'}\ //\ \overrightarrow{F'G'}$$

亦即 $\overrightarrow{F'P'}=\gamma\,\overrightarrow{F'G'}$，$\gamma\in R$

或寫成座標表示爲：

$$(x'-\xi_1',\ y'-\eta_1')'$$
$$=\gamma(\xi_2'-\xi_1',\ \eta_2'-\eta_1')'$$

由S'系之運算定義，則

$$x'-\xi_1'=\gamma(\xi_2'-\xi_1')$$
$$y'-\eta_1'=\gamma(\eta_2'-\eta_1')$$

所以L'直線在S'系中之方程式爲：

$$\frac{x'-\xi_1'}{y'-\eta_1'}=\frac{\xi_2'-\xi_1'}{\eta_2'-\eta_1'}$$

如將(4)式之G'，F'點代入上式，即得

$$[a_1(\eta_2-\eta_1)+b_1(\xi_1-\xi_2)]x'$$
$$+[a_2(\eta_2-\eta_1)+b_2(\xi_1-\xi_2)]y'$$
$$=\xi_1(\eta_2-\eta_1)+\eta_1(\xi_1-\xi_2) \quad \cdots\cdots(5)$$

另外，直線的相對應性質，亦可從另一觀點窺知。既然L在S系所代表的直線與L'在S'系中所代表之直線，完全相同。那麼，由$[\vec{S}]=[\vec{S'}][f]$轉換關係，L上任意點$P(x,y)$經轉換後得點$P'(x',y')'$兩者之位置向量$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{O'P'}$，所建立之直線應一

致。亦即

$$[\overrightarrow{OP}]=[\overrightarrow{O'P'}][f]$$

$$[x, y]=[x', y']\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{aligned} x &= a_1x' + a_2y' \\ y &= b_1x' + b_2y' \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

將(6)代入(3)式，即得

$$[a_1(\eta_2-\eta_1)+b_1(\xi_1-\xi_2)]x' + [a_2(\eta_2-\eta_1)+b_2(\xi_1-\xi_2)]y' = \xi_1(\eta_2-\eta_1)+\eta_1(\xi_1-\xi_2)$$

此結果與(5)式所得者完全一樣。

事實上，由於S與S'系中，各點經

$$[\overrightarrow{S}]=[\overrightarrow{S'}][f]$$

轉換而一一相對應，再加上前述向量運算的定義，以上直線系統之轉換，意義上，即將L線上各點，轉換成L'線上各相對應點，而維持同一條線的性質而已。但此性質却可推論出另一結果，且在下節述及。

六、S與S'系中幾何量大小的關係

這裡所謂“幾何量”，僅代表幾何之面積與線段長度（二度空間）而言，並不涉及角度關係，因為$\overrightarrow{e_1'}$，$\overrightarrow{e_2'}$之定義已經破壞了角度之量，故在斜座標系中不能牽涉到幾何角度，除非原幾何形狀具有完全的對稱關係，但即使如此，運算起來亦相當困難，因為只要S'系中，任意一個線長度改變，其所對應之角度，即須重新計算，所以欲計算角度，最好還是轉換為S系中，直接計算。

1.面積關係

在S'系中，兩向量，例如圖三$\overrightarrow{o'u'}=(\alpha_1, \beta_1)'$，$\overrightarrow{o'v'}=(\alpha_2, \beta_2)'$，所圍之平行四邊形$\square o'v'w'u'$面積（如為$\Delta o'v'u'$之面積，則為$\square o'v'w'u'$面積的一半），

$$/A/=\left|\,/\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{matrix}/\,\right|$$

$$=|\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1|$$

此面積值$/A/$為$o'v'w'u'$在S'系中之面積值，如表為S系之面積（一般之面積值），可利用向量轉換成$[\overrightarrow{S}]=[\overrightarrow{S'}]\cdot[f]$；因此式對於$S$系與$S'$系之定義，具有矩陣轉換性質，故對於$S$之面積（$\square ovwu$）而言，$|[\overrightarrow{S}]|$即為其面積大小，即

$$|A|=\text{平行四邊形 } ovwu \text{ 面積}$$

$$=\left|\,\left|\begin{bmatrix} \overrightarrow{ou} \\ \overrightarrow{ov} \end{bmatrix}\right|\,\right|$$

$|\;\;|\;|$ 表行列式之絕對值

又 $$\begin{bmatrix} \overrightarrow{ou} \\ \overrightarrow{ov} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overrightarrow{o'u'} \\ \overrightarrow{o'v'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

所以

$$|A|=\left|\,\left|\begin{bmatrix} \overrightarrow{o'u'} \\ \overrightarrow{o'v'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right|\,\right|$$

$$=\left|\,/\begin{bmatrix} \overrightarrow{o'u'} \\ \overrightarrow{o'v'} \end{bmatrix}/\cdot\left|\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right|\,\right|$$

$$=\left|\,/\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{matrix}/\cdot\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right|\,\right|$$

$$=|/\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1/|\cdot|a_1b_2-a_2b_1|$$

$$=|/A/|\cdot|a_1b_2-a_2b_1|$$

或是將$\overrightarrow{o'u'}$，$\overrightarrow{o'v'}$轉換為S系中，再計算為面積$|A|$，所得之結果亦相同。

2.直線上與平行向量長度之關係：

在S'系中兩向量，$\overrightarrow{P}'=(\alpha_1, \beta_1)'$，$\overrightarrow{Q}'=(\alpha_2, \beta_2)'$依$S'$系之向量長度定議：

$$/\overrightarrow{P}'/=\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}$$

$$/\overrightarrow{Q}'/=\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}$$

$\overrightarrow{P_1'}$，$\overrightarrow{Q}'$在S系中，所對應之向量$\overrightarrow{P}$，$\overrightarrow{Q}$座標為

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{Q} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overrightarrow{P}' \\ \overrightarrow{Q}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_1a_1+\beta_1a_2 & \alpha_1b_1+\beta_1b_2 \\ \alpha_2a_1+\beta_2a_2 & \alpha_2b_1+\beta_2b_2 \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{P}$，$\overrightarrow{Q}$在S系中之長度（即一般所謂之長度）

為

$|\overrightarrow{P}|$

$= \sqrt{(\alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2)^2 + (\alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2)^2}$

$= \sqrt{(a_1^2+b_1^2)\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1(a_1a_2+b_1b_2) + (a_2^2+b_2^2)\beta_1^2}$

同理

$|\overrightarrow{Q}|$

$= \sqrt{(a_1^2+b_1^2)\alpha_2^2 + 2\alpha_2\beta_2(a_1a_2+b_1b_2) + (a_2^2+b_2^2)\beta_2^2}$

當 $\overrightarrow{P}'$，$\overrightarrow{Q}'$ 在同直線上或為平行兩向量時（$\overrightarrow{P}$，$\overrightarrow{Q}$ 亦必同情形），則

$$\overrightarrow{P}' /\!/ \overrightarrow{Q}', \quad \overrightarrow{P}' = K\overrightarrow{Q}', \quad K \in R$$

即 $(\alpha_1, \beta_1) = K(\alpha_2, \beta_2)$

所以 $\alpha_1 = K\alpha_2$

$\beta_1 = K\beta_2$

將此兩等式代入 $\overrightarrow{P}'$，$\overrightarrow{Q}'$，$\overrightarrow{P}$，$\overrightarrow{Q}$ 中得其長度比率如下：

$$\frac{|\overrightarrow{P}'|}{|\overrightarrow{Q}'|} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}} = K$$

$$\frac{|\overrightarrow{P}|}{|\overrightarrow{Q}|} = \sqrt{\frac{(a_1^2+b_1^2)\alpha_1^2+2\alpha_1\beta_1(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2^2+b_2^2)\beta_1^2}{(a_1^2+b_1^2)\alpha_2^2+2\alpha_2\beta_2(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2^2+b_2^2)\beta_2^2}} = K$$

所以 $$\frac{|\overrightarrow{P}'|}{|\overrightarrow{Q}'|} = \frac{|\overrightarrow{P}|}{|\overrightarrow{Q}|}$$

七、應用與例子

這種斜座標系，在應用上，只要不涉及角度關係，甚是方便，主要是：

1. 座標系選定非常自由。
2. 分點公式適用於此系統。
3. 向量平行關係適用於此系統。
4. 由 3. 可知，斜座標系內，通過兩點之直線方程式 L'，可直接求得。而兩條直線 L_1'，L_2' 之交點，即為原幾何圖形，所對應兩線的交點。

以上這些應用，不外乎在求取合乎此斜座標之幾何圖形中的面積比率，或同直線上的長度比，平行兩向量之長度比。以下舉幾個例子供參考。

例1 如圖四，ΔABC 中，D，E 分別為 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 中點，F，G 三等分 $\overline{BC}$，則 ΔHFG，ΔBFI，ΔCGJ 三者之面積比為何？

解： 建立斜座標系如圖四，取

$A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$

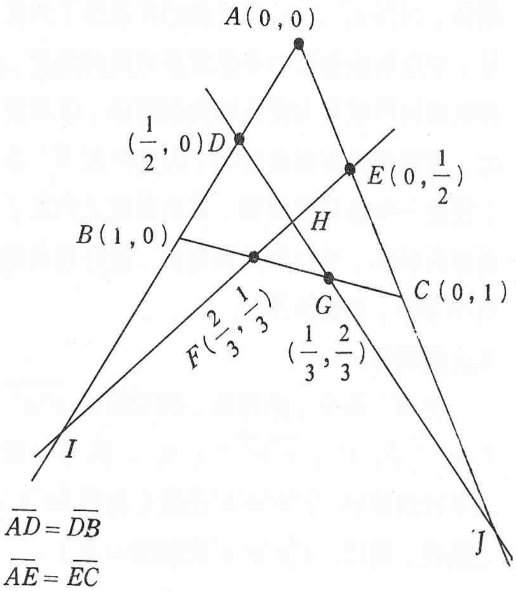
則 $D(\frac{1}{2}, 0)$，$E(0, \frac{1}{2})$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

同理 $G(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

欲知 H，I，J 三點座標，可利用各直線交點

$$\overleftrightarrow{EF}: \frac{y-\frac{1}{2}}{x-0} = \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow x + 4y = 2$$



$\overline{AD} = \overline{DB}$

$\overline{AE} = \overline{EC}$

$\overline{BF} = \overline{FG} = \overline{GC}$

圖四

$\overleftrightarrow{DG}$ ： $4x+y=2$

$\overleftrightarrow{AB}$ ： $y=0$ ， $\overleftrightarrow{AC}$ ： $x=0$

H為 $\overleftrightarrow{EF}$ ， $\overleftrightarrow{DG}$ 交點，故H座標為

$\begin{cases} x+4y=2 \\ 4x+y=2 \end{cases}$ 之解 $\Rightarrow H\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$

同理， $I(2,0)$ ， $J(0,2)$

所以

$$a\Delta HFG : a\Delta BFI : a\Delta CGJ$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\overrightarrow{HG}\\ \overrightarrow{HF}\end{vmatrix} : \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\overrightarrow{BF}\\ \overrightarrow{BI}\end{vmatrix} : \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\overrightarrow{CG}\\ \overrightarrow{CJ}\end{vmatrix}$$

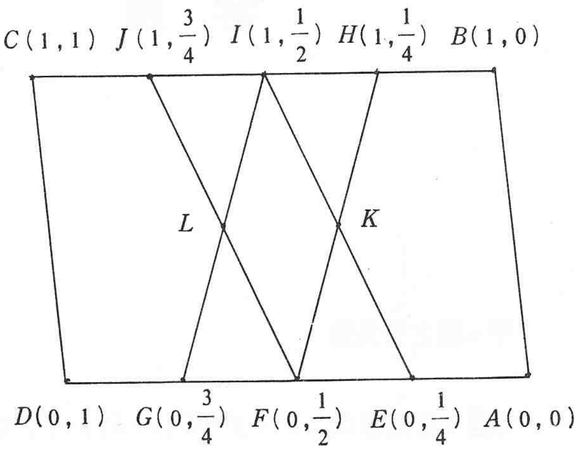
$$=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\frac{2}{5} & \frac{2}{3}-\frac{2}{5}\\ \frac{2}{3}-\frac{2}{5} & \frac{1}{3}-\frac{2}{5}\end{vmatrix}$$

$$:\begin{vmatrix}\frac{2}{3}-1 & \frac{1}{3}-0\\ 2-1 & 0-0\end{vmatrix}$$

$$:\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-0 & \frac{2}{3}-1\\ 0-0 & 2-1\end{vmatrix}$$

$=1:5:5$ （取正值）

例2　如圖五，平行四邊形$ABCD$面積爲1，則$FKIL$面積爲何？已知E,F,G與H,I,J分別將 $\overline{AD}$ 及 $\overline{BC}$ 四等分。



$\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GD}$

$\overline{BH}=\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{JC}$

圖五

解：將$\square ABCD$座標化如圖五，取

$A(0,0)$ ， $B(1,0)$

$C(1,1)$ ， $D(0,1)$

則 $E\left(0,\frac{1}{4}\right)$ ， $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$G\left(0,\frac{3}{4}\right)$ ， $H\left(1,\frac{1}{4}\right)$

$I\left(1,\frac{1}{2}\right)$ ， $J\left(1,\frac{3}{4}\right)$

$\begin{cases} \overleftrightarrow{IE}: x-4y=-1 \\ \overleftrightarrow{HF}: x+4y=2 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$

$\begin{cases} \overleftrightarrow{JF}: x-4y=-2 \\ \overleftrightarrow{IG}: x+4y=3 \end{cases} \Rightarrow L\left(\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)$

所以面積比：

$$\frac{a\square FKIL}{a\square ABCD}$$

$$=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{FK}\\ \overrightarrow{FL}\end{vmatrix}\right| : \left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AD}\end{vmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{8}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8}\end{vmatrix}\right| : \left|\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{8}:1$$

所以 $a\square FKIL=\frac{1}{8}\times 1=\frac{1}{8}$ 。

例3　如圖六，$\square ABCD$爲等腰梯形，且E爲 $\overline{BC}$ 中點， $\overline{BC}:\overline{AD}=5:8$ ，則

$\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GD}=$？

解：將原圖形座標化如圖六，取$\overline{CH}\parallel\overline{BA}$

$A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ， $C(1,1)$ ，

$H(0,1)$ ，則$D\left(0,\frac{8}{5}\right)$ ， $E\left(1,\frac{1}{2}\right)$

由直線方程式 $\overleftrightarrow{BD}$ ， $\overleftrightarrow{AE}$ ， $\overleftrightarrow{AC}$ 求出G，F座標。

$\begin{cases} \overleftrightarrow{BD}: 8x+5y=8 \\ \overleftrightarrow{AE}: x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{16}{21},\frac{8}{21}\right)$

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{BD}: 8x+5y=8 \\ \overleftrightarrow{AC}: x-y=0\end{cases} \Rightarrow \left(\frac{8}{13}, \frac{8}{13}\right)$$

所以

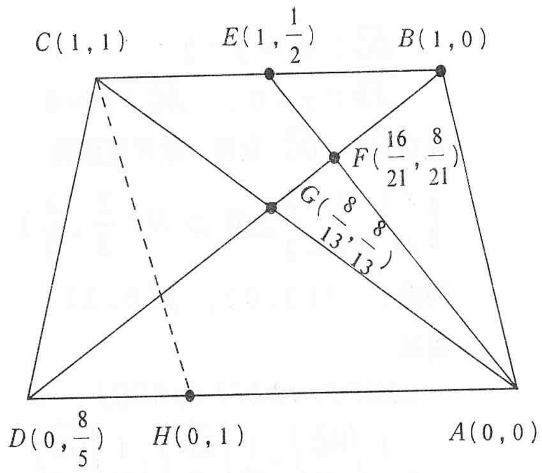
$$\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GD}$$

$$=|\overrightarrow{BF}|:|\overrightarrow{FG}|:|\overrightarrow{GD}|$$

$$=\left|\left(\frac{-5}{21}, \frac{8}{21}\right)\right|:\left|\left(\frac{-40}{273}, \frac{64}{273}\right)\right|:\left|\left(\frac{-8}{13}, \frac{64}{65}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{21}\sqrt{89}:\frac{8}{273}\sqrt{89}:\frac{8}{65}\sqrt{89}$$

$$=65:40:168$$



$\overline{BE}=\overline{EC}$

$\overline{BC}:\overline{AD}=5:8$

圖六

兩點決定一直線的應用

容 風

直線方程式的型態有六種：點斜式、斜截式、兩點式、截距式、法線式和參數式。當問題出現時，學生往往都會先想如何利用以上六式，然而在①圓之公共弦②錐線之切點弦（或稱極線）③錐線之直徑，求其公式時，直接運用「兩點成一線」之基本觀念，却較爲方便。因時下高中數學課本，於此三者，鮮少提及。茲將其整理，分述如下，作爲補充：

甲、圓之公共弦

命題：若兩圓 $C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

C_1, C_2 相交於 A，B 兩點，則

$\overleftrightarrow{AB}: (D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$