定向圖形面積求法及證明

楊重駿

壹、導　言

在數播第7卷第3期（1983年）羅添壽先生的一篇文章“多邊形面積之求法專論”中介紹了一般多邊形（凸或凹的）的面積求法。主要是下面的一個結果：

定理1　設 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，……，$P_n(x_n,y_n)$ 爲 xy—平面上依逆時針（或順時針）方向形成的 n 多邊形 P_n 的 n 個頂點；$n\geqslant 3$，則其面積可表爲

$$\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} x_1 x_2 \cdots\cdots x_n x_1 \\ y_1 y_2 \cdots\cdots y_2 y_1 \end{pmatrix}\right| \qquad (1.1)$$

其中｜｜爲絕對值記號，

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \cdots\cdots x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \cdots\cdots y_n & y_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots\cdots y_n & y_1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 y_2 - y_1 x_2 + y_2 x_3 - x_2 y_3 + \cdots$$

$$+ x_n y_1 - x_1 y_n\ ;$$

$$\begin{matrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{matrix} = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$$

若大家仍記得平面上具坐標爲（x_1，y_1），（x_2,y_2），（0，0）三點圍成的三角形面積 $=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$，因此公式（1.1）相當於 P_n 包含原點的情形，並且把 P_n 分成 $\triangle OP_1P_2$，$\triangle OP_2P_3$ ……等 n 個三角形面積之和，但細心的讀者不難從上文中看出公式1.1證明的過程中，利用（但未提及）了方式性，（否則證明就難自圓其說了），又該處證明亦多少利用了直觀的圖形，因此有欠嚴謹，且公式（1.1）的推導對一般自交的多邊形（即多邊形的各邊的交點除了頂點尙有非頂點之交點，參看圖1.2）就顯得可疑了。事實上公式（1.1）的證明涉及定向多邊形及定向面積。這是我們在本文要詳細介紹的。

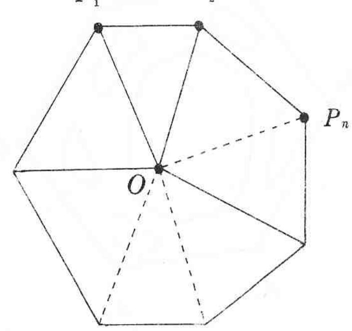

圖1.1

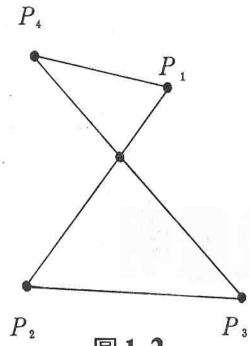

圖1.2

另外，我們談談一個實際應用的問題。假設我們要在平面上測量一個由頂點A_1，A_2，……，A_n 包圍成的多邊形區域面積。假設此面積很大，而且其中崇山峻嶺，沼澤密布（參看圖1.3），實在不易測得各頂點的座標，以便利用公式（1.1）來求出它的面積，但如果我們很方便可求出此多邊形的各邊邊長及兩相鄰邊的夾角，在此情形下，我們是否只利用此些資料來求出此區域的面積？答案是肯定的，就像人們把純量推廣到向量（我們在本文中假定讀者對向量有基本的認識），就可解決許多實際的問題及簡化許多複雜現象的說明，我們把面積定向後也有許多意想不到的效用。本文主要是介紹定向圖形的定向面積的基本定義及其一些應用，附帶使讀者能對公式（1.1）原證明有嚴謹的基礎，並例舉許多問題顯示出有時用定向面積比不用定向的證明方法來得簡明得多。本文內容主要是參考原爲俄文的通俗數學論叢中“Computation of Aera of oriented Figures ”的英譯本〔1〕。

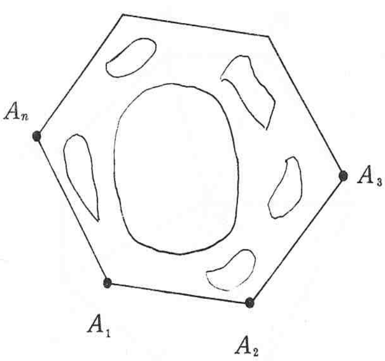

圖1.3

貳、定義及性質

在平面幾何大家的概念是一旦給定了不在一直線上三個頂點A，B，C，則就給定了三角形ABC。但我們也可從一新的概念來看，卽把一個三角形看作是由一點出發，沿著一條由三個直線段劃出的閉路線，而該三直線段爲聯結相鄰的頂點者（稱爲三角形的三個邊）。這樣一來，如何劃出（卽通過此頂點的秩序）就可有所區別了。於是給定三個頂點後及給定劃出此三角形的秩序，就成了一個定向三角形。一般我們用箭頭來表示此描劃的秩序。

我們稱一個沿逆時針方向劃出的三角形（或多邊形）爲右向的（參看圖2.1），沿順時針方向劃出的三角形（或多邊形）爲左向的。而事實上所謂定向在三角形就指此兩方向而已。但對n（$n>3$）邊形就不受此限了。要注意的是一個定向三角形，與由那個頂點起始無關。換言之，若我們以ABC表圖2.1中的定向三角形，則ABC或BCA或CAB皆表相同的定向三角形。則圖2.2中的定向三角形爲BAC或ACB或CBA。

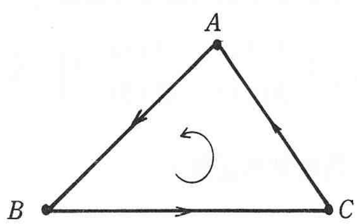

圖2.1 右向

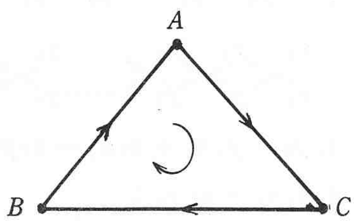

圖2.2 左右

我們將以△ABC表示無定向的三角形ABC。

定義 2.1：定向三角形的定向面積

我們用$\pm S(ABC)$表一定向三角形ABC的定向面積，其中，$S(ABC)$爲一般無定向的△ABC的面積，其恒$\geqslant 0$，並規定對右向的定向面積取"＋"號，而左向的定向面積取"－"號。讀者能否想出爲何規定右向取"＋"號，而左向取"－"號？面積有了方向就如同向量的情形有其實際應用的地方。在明白此一新概念有什麼大的功用之前，先介紹兩個在平面幾何上的很明顯的事實。

定理 2：若A爲△ABC的一頂點，而A'爲位於其對邊BC上任一點（參看圖 2.3）則$S(ABC)=S(AA'C)+S(AA'B)$。

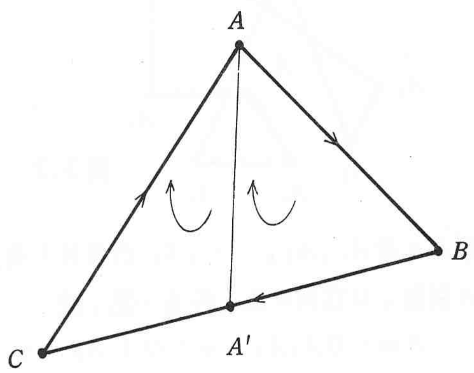

圖 2.3

定理 3：若A爲△ABC的一頂點，A'爲位於其對邊BC延線上任一點（參看圖 2.4），則$S(ABC)=|S(AA'C)-S(AA'B)|$。

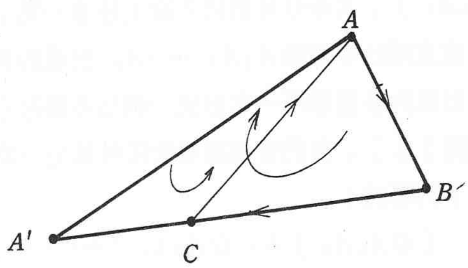

圖 2.4

現如果把方向定出（參看圖 2,3 及圖 2.4）及依據定向面積的定義，我們可以把上面兩個相關的定理合爲一個定理敍述如下：

首先，我們以(ABC)表定向三角形ABC之定向面積。

定理 4：若A爲三角形ABC的一頂點，A'爲其對邊BC或其延線上任一點，則定向三角形ABC的面積爲定向三角形$A'AB$及定向三角形$A'CA$之和。即$(ABC)=(A'AB)+(A'CA)$。

另外定向三角形面積的一個效用是有關若干個定向三角形面積的相加，大家都可看出若O爲三角形ABC內部任一點，則$S(ABC)=S(OAB)+S(OAC)+S(OBC)$,（參看圖 2.5）。

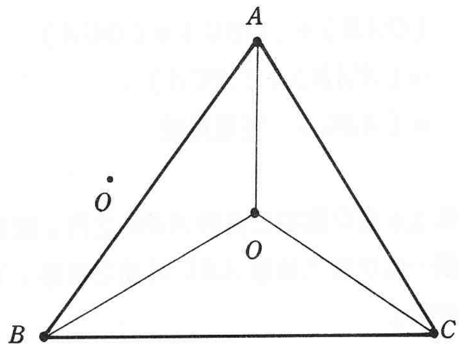

圖 2.5

但若O點位於三角形ABC之外，則此結論明顯不成立。

但此類似的矛盾在定向面積時就消失了，這也是下面定理的內容。

定理 5：（相加定理）設O爲三角形ABC所定的平面上任一點，則定向三角形ABC之定向面積爲定向三角形OAB，OBC與OCA之定向面積之和。即$(ABC)=(OAB)+(OBC)+(OCA)$。

證：設A'爲AO與BC(或其延線上的一交點)，則由定理4我們有(參照圖2.6)

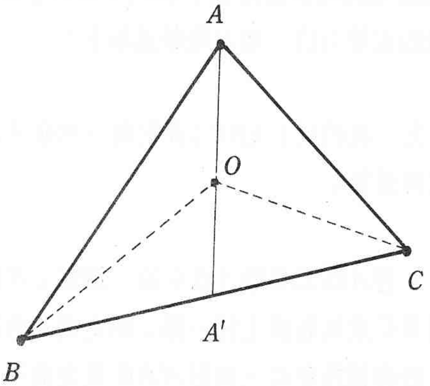

圖2.6

$$(OAB)=(A'AB)+(A'BO)$$

同理我們有

$$(OBC)=(A'OB)+(A'CO)$$

及

$$(OCA)=(A'OC)+(A'CA)$$

將此三式相加並且注意$(A'BO)+(A'OB)=0=(A'CO)+(A'OC)$

我們有

$$(OAB)+(OBC)+(OCA)$$
$$=(A'AB)+(A'CA)$$
$$=(ABC)\quad \text{定理得證}$$

註：圖2.6是O點在三角形ABC之內，讀者不妨劃一當O在三角形ABC外邊之情形，並試加證明。

叁、定向多邊形及其定向面積

一個照秩序$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$爲頂點劃出的定向$n$邊形，以$P_n(A_1A_2\cdots\cdots A_n)$表之，是指一個由依次連結，有向線段$\overrightarrow{A_1A_2}$，$\overrightarrow{A_2A_3}$，……，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$，$\overrightarrow{A_nA_1}$所圍成的一閉路徑。這些有向線段也就是此定向多邊形$A_1A_2\cdots\cdots A_n$的邊。同樣的，稱順時針劃出的爲左向，逆(或反)時針得出的爲右向。但這些概念對一個凸多邊形來講是很淸楚。設P_n爲一通常的凸n多邊形，$S(P_n)$表通常的面積(恒$\geqslant 0$)。則左向的P_n的定向面積爲$-S(P_n)$，右向的P_n的定向面積爲$+S(P_n)$。但此左向、右向對非凸的多邊形(參看圖3.1及圖3.2)，就成問題了。於是，爲了避免混淆，我們要求所謂左向或右向僅對凸多邊形而言。但這並不是說我們無法用定向面積來處理非凸多邊形的定向面積。下面我們就來提供如何處理一般的定向的n多邊形的定向面積的法子，主要的是下面的定理。

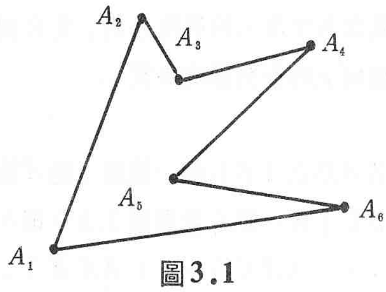

圖3.1

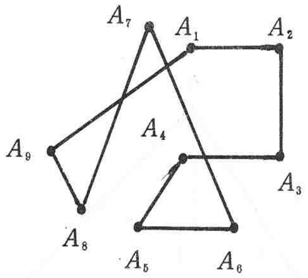

圖3.2

定理6：設$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$爲位於平面上的$n$個點，$O$爲同平面上任意一點。設

$$S=(OA_1A_2)+(OA_2A_3)+\cdots$$
$$\cdots+(OA_{n-1}A_n)+(OA_nA_1)$$

則S之值與O點的位置無關。

因而我們也就可以定一個定向多邊形$P_n(A_1\cdots\cdots A_n)$的定向面積$(A_1A_2\cdots\cdots A_n)=(OA_1A_2)+(OA_2A_3)+\cdots\cdots+(OA_nA_1)$，其中$O$可爲同平面上任意一點。

證：注意照此n個點$A_1A_2\cdots\cdots A_n$出現的秩序描出來的多邊形不一定形成一個凸多邊形(參看圖3.3)。我們若能證明對任何其它一點O'，下列等式：

$$(OA_1A_2)+(OA_2A_3)+\cdots\cdots$$
$$+(OA_nA_1)$$

$$=(O'A_1A_2)+(O'A_2A_3)+\cdots\cdots$$
$$+(O'A_nA_1) \qquad (3.1)$$

成立，則原定理就得證了。參照圖 3.3 對同平面上 $n+2$ 個點 O，O'，A_1，A_2，……，A_n 我們引用相加定理可得。

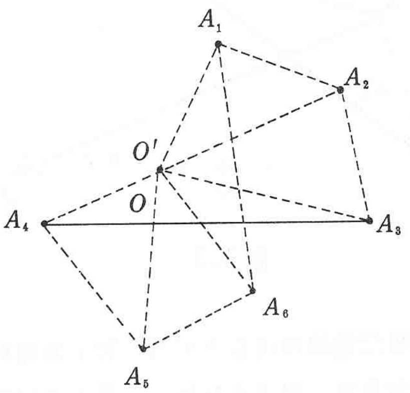

圖 3.3

$$(OA_1A_2)=(O'A_1A_2)+(O'A_2O)+(O'OA_1)$$
$$(OA_2A_3)=(O'A_2A_3)+(O'A_3O)+(O'OA_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(OA_iA_{i+1})=(O'A_iA_{i+1})+(O'A_{i+1}O)+(O'OA_i)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(OA_{n-1}A_n)=(O'A_{n-1}A_n)+(O'A_nO)+(O'OA_{n-1})$$
$$(OA_nA_1)=(O'A_nA_1)+(O'A_1O)+(O'OA_n)$$

將上面 n 個式子相加起來，注意 $(O'OA_i)$ 與 $(O'A_iO)$ 相消，就可立即得到式（3.1）

例題 3.1　設 A_1，A_2，……A_7，A_8 依次爲半徑 R 的圓周上 8 個點，並將圓周分成 8 等分，參看圖 3.4。

試求按箭頭定向的八邊形 $A_1A_2A_7A_6A_5A_4A_3A_8$ 的定向面積。

解：我們先考慮 $A_1A_2\cdots\cdots A_8$ 爲左向的情形，及不妨將圓心取爲定理 6 中的點 O，$(OA_1A_2)=s$，及 $(OA_2A_7)=t$。

則不難驗證

$$(OA_7A_6)=-s \qquad (OA_6A_5)=-s$$
$$(OA_5A_4)=-s \qquad (OA_4A_3)=-s$$
$$(OA_3A_8)=t \qquad (OA_8A_1)=s$$

於是

$$(A_1A_2A_7A_6A_5A_4A_3A_8)=-2s+2t$$

但 $|s|=|t|=R^2\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，並注意由圖 3.4 看 $s=(OA_1A_2)$ 爲負値，$t=(OA_2A_7)$ 爲正，故 $-2s+2t=R^2\sqrt{2}$。

∴在 $A_1\cdots\cdots A_8$ 爲左向的情形答案爲 $R^2\sqrt{2}$。

當 $A_1A_2\cdots\cdots A_8$ 爲右向時，答案爲 $-R^2\sqrt{2}$，（讀者試驗證或解說之）。

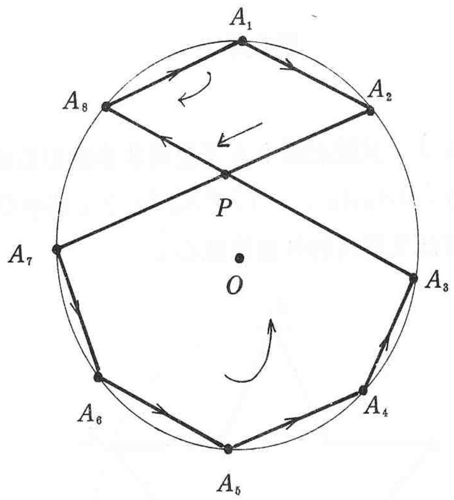

圖 3.4

如果讀者仍不體會利用定向面積的概念及原理的用場，不妨試照往常無定向的面積求法，去設法求出圖 3.4 中兩個多邊形（無定向者）$PA_3A_4A_5A_6A_7$ 及 $PA_8A_1A_2$ 的面積之差爲 $R^2\sqrt{2}$。（注意由定向面積之定義立即可見例題 3.1 求出的就是兩多邊形 $PA_3A_4A_5A_6A_7$ 及 $PA_8A_1A_2$ 面積之差！）。相信這時問題的困難性會使讀者對定向面積的概念及用場有進一步的體會了。

例題 3.2　試求圖 3.5 中定向五邊形 $A_1A_5A_6A_2A_3$ 的定向面積，其中 A_1，A_2，A_3，A_4 A_5，

A_6 爲正六邊形的六個頂點。

提示：取 O 爲此正六邊形外接圓圓心，則

$$(A_1A_5A_6A_2A_3)=(OA_5A_6)$$
$$=-R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

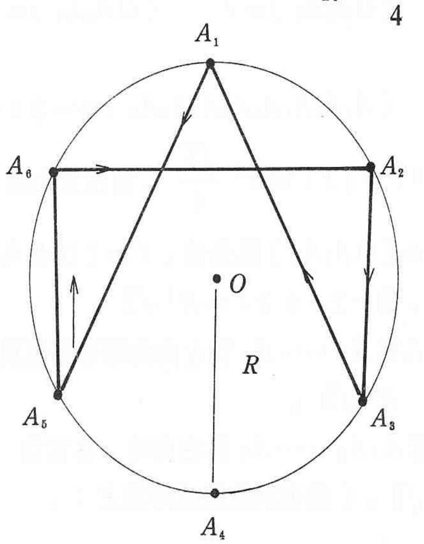

圖 3.5

例題 3.3 試驗記圖 3.6 五星角狀多邊形的面積 $=5(OA_2A_3)-5(PA_2A_3)$。其中 O 爲外接此五星角的外接圓圓心。

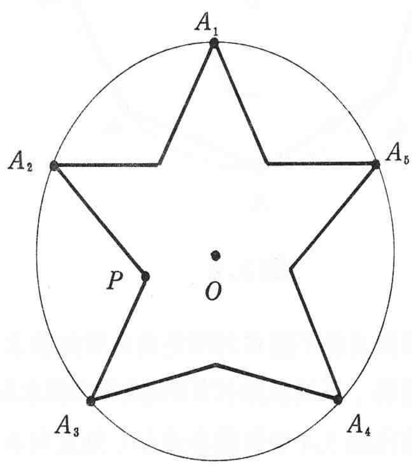

圖 3.6

我們再舉一個幾何的證明題加深讀者對定向面積的印象。

例題 3.4 我們想知道可否在半圓弧 $PABQ$（參看圖 3.7）上取得兩點 A，B，使得（無定向）三角形 ABN 及 PQN 兩者面積相等，其中點 N 爲弦 PB 與 QA 的交點？如果答案是不可能，又如何去證明它？

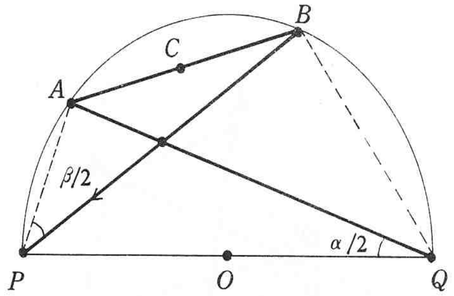

圖 3.7

解：這種問題顯然也似乎可用一般平面幾何的推論得到答案，讀者不妨試一下看有多困難。我們現利用定向的概念來解。

參看圖（3.7）我們有

$$(ABPQ)=(OAB)+(OBP)$$
$$+(OPQ)+(OQA)$$

上式中若以 α 表弧 PA 及 β 表弧 $\widehat{AB}$，及利用△面積三角公式及注意 $(OPQ)=0$ 我們有

$$(ABPQ)=\frac{1}{2}R^2[-\sin\beta$$
$$+\sin(\alpha+\beta)$$
$$+\sin(\pi-2)] \tag{3.2}$$

現若可能有 $S(ABN)=S(PQN)$ 則其充要條件爲 $(ABPQ)=(ABN)+(PQN)=0$。從而由式（3.2）得

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta+\sin\alpha=0$$

或

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta=-\sin\alpha$$

由三角和差公式上式變成

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

（因 $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$ ，何故）？故

$$\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\frac{\alpha}{2}$$

因此

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=0$$

此不可能因 $\alpha+\beta<\pi$ ，及 $\beta\neq\pi$ ，定理因而得證。

今提出下面二習題作爲本節的小結，希望讀者試用一般無定向面積的求法及定向法來解，並比較何者利便。

習題 3.1　若直線段 A_1B_1 , A_2B_2 , ……, A_nB_n ，有一公共的中點，則 $(A_1, A_2 \cdots\cdots, A_n)=(B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n)$。

習題 3.2　若定向多邊形 $B_1B_2\cdots\cdots B_n$ 是由定向多邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 平移所得的，（即有向線段 $\overrightarrow{A_1B_1}$ ，$\overrightarrow{A_2B_2}$ ，……，$\overrightarrow{A_nB_n}$ 爲互相平行且等長的向量）。則 $(A_1\cdots\cdots A_n)=(B_1\cdots\cdots B_n)$。

肆、由任意定向閉曲線圍成的平面圖形的定向面積

前面我們談及的是由有限直線段劃出的圖形定向面積，將此推廣到由一任意定向閉曲線圍成的平面圖形的定向面積是很自然的一個問題，我們就稍作介紹。爲方便討論我們以（L）表示一由定向曲線 L 圍成的定向面積。不過要提醒的一點，在實際應用中（特別是電腦的數值計算）定向多邊形的定向面積求法足夠需要了，這兒介紹是理論上的興趣。

首先我們要定義一個閉曲線的定向面積。讀者不妨先回想一下人們是如何求出一個圓的面積或一個曲線圍成的面積。對於圓人們是用一個內接正 n 邊形，使 n 逐漸增大的極限值就是圓的面積。對於由一個定向曲線我們也用此一方式，所謂一定向閉曲線是指循著某一特定的秩序刻劃出的曲線，對於任何一定向閉曲線 L ，我們設法將此曲線分成 2^2 等分，（如果分成等分最好）再在每一分曲線段上分成 2 等分，如此分下去，使每個分曲線段在 n 階段分割後爲原曲線長 $|L|$ 的 $\frac{L}{2^{n+1}}$ 。如此我們相應有 $A_1, A_2 \cdots\cdots A_{2^{n+1}}$ 個分點，其秩序與刻劃曲線時出現的秩序相同。如 L 爲一不自交的閉曲線，則通常以逆時針向爲其定向。

$\lim\limits_{n\to\infty}(A_1A_2\cdots\cdots A_{2^{n+1}})$ 就是定向閉曲線 L 的定向面積。有了此一定義，我們可以證明一個與測面器（測量平面地區面積的一種儀器）原理有關的幾何結果如下。至於測面器的構造及原理請參看〔1〕。

定理 7：設 $\overrightarrow{AB}$ 爲平面上一有向線段，今設想將此線段在平面上移動最後回到原位置，於是點 A 與點 B 各自劃出一閉曲線以 L_A 及 L_B 表之。同時，$\overrightarrow{AB}$ 也掃出一個有向的面積 S 。則

$$S=(L_B)-(L_A)$$

證：首先我們要注意這個定理的結果與 A ，B 的相對位置無關，與曲線的刻劃有關。先看簡單情形：若 $\overrightarrow{AB}$ 的點 A 劃出一圓周，則 B 亦然（參看圖 4.1)。這時 L_A 及 L_B 皆爲右向，於是 L_A 及 L_B 皆爲正，且不難證得 $S=L_B-L_A$ 。但若不是如此簡單的刻劃時，情形就會相當複雜。而且我們的證明最好不靠幾何圖形的情況

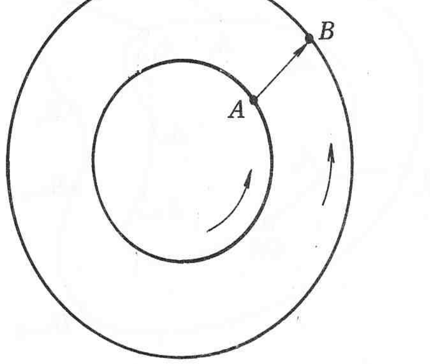

圖 4.1

，當然具體的圖像常能誘導出適當的推理，但要注意是否顧及到所有可能的情況，否則顧此失彼，得到並不完全正確的結論。爲此我們設想點A劃出一閉曲線C_A，點B同時劃出一曲線C_B，在C_A上取n個等分點A_1（$=A$），A_2，……，A_n，相應C_B上爲B_1（$=B$），B_2，……，B_n，則由此兩定向n多邊形圍成的定向面積爲

$$S_n=(A_1B_1B_2A_2)+(A_2B_2B_3A_3)+\cdots\cdots+((A_nB_nB_1A_1)$$

現任取平面上一點O，引用定理6有

$$(A_1B_1B_2A_2)=(OA_1B_1)+(OB_1B_2)+(OB_2A_2)+(OA_2A_1)$$

$$(A_2B_2B_3A_3)=(OA_2B_2)+(OB_2B_3)+(OB_3A_3)+(OA_3A_2)$$

…………………………………………………………

…………………………………………………………

$$(A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n)$$
$$=(OA_{n-1}B_{n-1})+(OB_{n-1}B_n)+(OB_nA_n)+(OA_nA_{n-1})$$

$$(A_nB_nB_1A_1)=(OA_nB_n)+(OB_nB_1)+(OB_1A_1)+(OA_1A_n)$$

將上面諸式相加可得

$$S_n=[(OB_1B_2)+(OB_2B_3)+\cdots\cdots+(OB_{n-1}B_n)+(OB_nB_1)]+[(OA_2A_1)+(OA_3A_2)+\cdots\cdots+(OA_nA_{n-1})+(OA_1A_n)]$$

但 $OA_{i+1}A_i=-(OA_iA_{i+1})$

$i=1$，2，……，n 於是

$S_n=(B_1B_2\cdots\cdots B_n)-(A_1A_2\cdots A_n)$

使 $n\to\infty$

則 $(B_1\cdots\cdots B_n)\to(L_B)$，

$(A_1\cdots\cdots A_n)\to(L_A)$，

$S_n\to S$ 從而得所求的結果。

$$S=(L_B)-(L_A)。$$

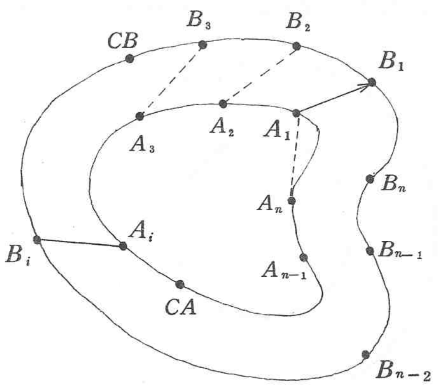

圖4.2

伍、測量任意多邊形的面積

我們先介紹一些新的記號，對於一個定向三角形ABC我們可視其由兩個向量$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{BC}$合成（參看圖5.1）。（注意秩序不能隨便的），也可看作$\overrightarrow{BC}$及$\overrightarrow{CA}$的合成，這時我們可記

$$(ABC)=S(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=S(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA})$$

不難驗證若$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BC}$分別與$\overrightarrow{A'B'}$及$\overrightarrow{B'C'}$相等，

則 $(ABC)=(A'B'C')$

即 $S(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=S(\overrightarrow{A'B'}\ \overrightarrow{B'C'})$。

若以α_1表$\overrightarrow{A_1A_2}$，$\alpha_2=\overrightarrow{A_2A_3}$，……，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\alpha_{n-1}$，$\overrightarrow{A_nA_1}=\alpha_n$，現一個依序$A_1$，$A_2$，……，$A_n$爲頂點的定向多邊形，其可視爲由向量$\overrightarrow{A_1A_2}$，$\overrightarrow{A_2A_3}$，……，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ $\overrightarrow{A_nA_1}$依次合成的，則我們可記（A_1，A_2，……，A_n）$=S(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{n-1})$

定理8：設A_1，A_2，……，A_n及B_n爲平面上任意$n+1$個點，則

$$(A_1A_nB_n)=(A_1A_2B_2)+(A_2A_3B_3)+\cdots\cdots+(A_{n-1}A_nB_n) \tag{5.1}$$

其中B_1，B_2，……，B_{n-1}爲使$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{A_2B_2}$，……$\overrightarrow{A_{n-1}B_{n+1}}$皆與$\overrightarrow{A_nB_n}$相等的點。（參看圖5.2，其實一個一般性的證明不應依靠圖形的）。

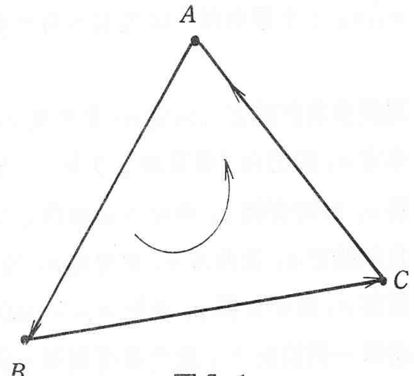

圖 5.1

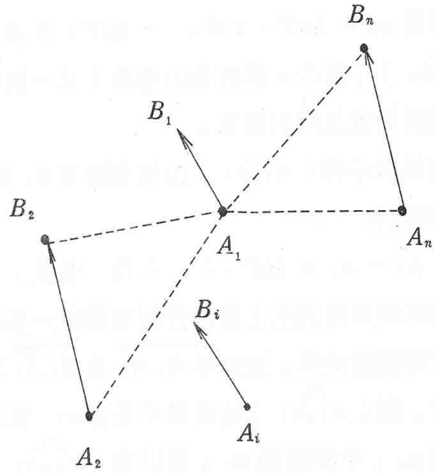

圖 5.2

證：我們不妨設想向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移動經歷 $\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{A_2B_2}$……$\overrightarrow{A_nB_n}$，最後回到 $\overrightarrow{A_1B_1}$，依定理 7 有

$$
\begin{aligned}
&(A_1B_1B_2A_2)+(A_2B_2B_3A_3)+\cdots\cdots\\
&+(A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n)+(A_nB_nB_1A_1)\\
&=(B_1B_2\cdots B_n)-(A_1A_2\cdots A_n) \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

但上式右邊為 0，因 $\overrightarrow{A_iB_i}$，$i=1，2，\cdots$，n 皆為相等的向量。（參看 § 3 中的習題）。又因 $A_iB_iA_{i+1}B_{i+1}$ 為一平行四邊形，其相對邊 $\overrightarrow{A_iB_i}$ 及 $\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}$ 為相等的向量，故

$$
\begin{aligned}
(A_iB_iB_{i+1}A_{i+1})&=-(A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i)\\
&=-2(A_iA_{i+1}B_{i+1})
\end{aligned}
$$

$$(i=1，2，\cdots\cdots，n-1)$$

$$(A_nB_nB_1A_1)=(A_1A_nB_nB_1)=2(A_1A_nB_n)$$

將此諸式代入 (5.2) 中立即可得 (5.1) 式。

註：現以 $\overrightarrow{A_1A_2}=\alpha_1$，……$\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\alpha_i$，… $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\alpha_{n-1}$，$\overrightarrow{A_nB_n}=\alpha_n$，及假設 $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_3B_3}=\cdots\cdots=\overrightarrow{A_{n-1}B_{n-1}}=\overrightarrow{A_nB_n}=\alpha_n$，代入 (5.1) 中得

$$
\begin{aligned}
(A_1A_nA_n)=&S(\alpha_1,\alpha_n)+S(\alpha_2,\alpha_n)+\cdots\\
&+S(\alpha_{n-1},\alpha_n) \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

有了上面一些結果我們現來處理一 6 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 看一般如何僅利用邊長及兩鄰邊的夾角來求得一多邊形的面積。現我們不借助任何圖形來進行。

由定理 6（取 A_1 為 O 點）有

$$
\begin{aligned}
&(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)\\
&=(A_1A_2A_3)+(A_1A_3A_4)+(A_1A_4A_5)\\
&\quad+(A_1A_5A_6) \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

現再引用定理 8（$n=3$ 及取 $B_3=A_4$）於是我們有

$$
\begin{aligned}
(A_1A_3A_4)=(A_1A_3B_3)=&S(\alpha_1,\alpha_3)\\
&+S(\alpha_2,\alpha_3)
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
(A_1A_4A_5)=&S(\alpha_1,\alpha_4)+S(\alpha_2,\alpha_4)\\
&+S(\alpha_3,\alpha_4) \qquad (5.5)\\
(A_1A_5A_6)=&S(\alpha_1,\alpha_5)+S(\alpha_2,\alpha_5)\\
&+S(\alpha_3,\alpha_5)+S(\alpha_4,\alpha_5)\\
&\qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

將 (5.5)，(5.6) 兩式代入 (5.4) 中，並注意 $(A_1A_2A_3)=S(\alpha_1,\alpha_2)$，可得

$$
\begin{aligned}
&S(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\\
&=S(\alpha_1,\alpha_2)+S(\alpha_1,\alpha_3)+S(\alpha_1,\alpha_4)+S(\alpha_1,\alpha_5)\\
&\quad+S(\alpha_2,\alpha_3)+S(\alpha_2,\alpha_4)+S(\alpha_2,\alpha_5)\\
&\quad+S(\alpha_3,\alpha_4)+S(\alpha_3,\alpha_5)\\
&\quad+S(\alpha_4,\alpha_5)
\end{aligned}
$$

有了以上的結果形式不難推得對任一定向 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$，置 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\alpha_i$（$i=1，2，\cdots\cdots，n-1$）則有

$$
\begin{aligned}
&(A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n)\\
&=S(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_{n-1})\\
&=S(\alpha_1,\alpha_2)+S(\alpha_1,\alpha_3)+\cdots+S(\alpha_1,\alpha_{n-1})\\
&\quad+S(\alpha_2,\alpha_3)+\cdots+S(\alpha_2,\alpha_{n-1})\\
&\quad+S(\alpha_3,\alpha_4)+\cdots+S(\alpha_3,\alpha_{n-1})\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad+S(\alpha_{n-2},\alpha_{n-1}) \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

從而由此公式我們可藉由多邊形的各邊邊長，及任何兩邊的夾角就可求出一多邊形面積。但公式(5.7)中$S(\alpha_i,\alpha_{i+1})$的計算不成問題，但對$S(\alpha_i,\alpha_j)$ $|i-j|\geqslant 2$ 即α_i,α_j為不相鄰的兩邊時就有困難來決定其間的夾角，i，j相差愈大似乎愈難，但我們可以由定向角的一概念來克服這一問題。以下我們來看什麼是定向角概念？

如何測量任一n多邊形任兩邊的夾角其關鍵在把所涉及的邊的方向計算在內。譬如我們要測由邊$\overrightarrow{A_1A_2}=\alpha_1$及邊$\overrightarrow{A_2A_3}=\alpha_2$所夾的角，我們任取定一點$O$，並由$O$點作出分別與$\alpha_1$及$\alpha_2$相等的向量（參看圖5.3）。

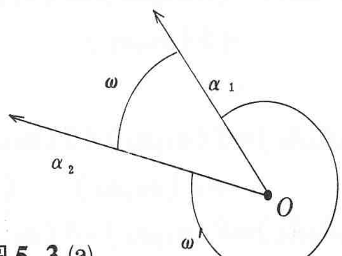

圖5.3(a)

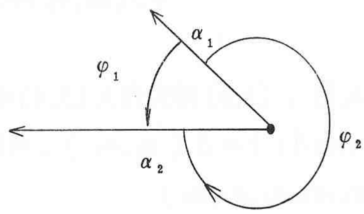

圖5.3(b)

今將向量α_1繞O作旋轉直到它的方向與α_2重合。若此旋轉為反時針方向（圖5.3 a），且旋轉的角度為ω（>0）則規定α_1與α_2的定向角為ω。但若此旋轉為順時針（圖5.3 b）則此夾角度$\omega'=360^\circ-\omega$（注意ω'亦為正數！）。這時α_1與α_2的定向角為$-\omega'$換言之，α_1與α_2的定向角有α：一為ω，另一為$-\omega'$視反時針方向或逆時針方向而定，但$-\omega'=\omega-360^\circ$。注意參看圖5.3 b有$\varphi_1-\varphi_2=360^\circ$。從而可見我們對$\alpha_1$與$\alpha_2$的定向角用$(\widehat{\alpha_1,\alpha_2})$表之，可用正角度$\omega(=\varphi_1)$量之，也可用一負度數$\omega-360^\circ$（$\varphi_2$）量之。讀者這時或有疑惑，怎麼可用一正及一負度數來表示同度（$\widehat{\alpha_1,\alpha_2}$）？這兩種不同的表示有什麼好處？

現假若我們給定一向量α_1及角度φ_1我們希望來定α_2的方向（參看圖5.3 b），則我們只需將α_1逆時針轉φ_1角度$=\omega$即得。反過來如果我們給定α_1及角度φ_2要得知α_2的方向，則只需將α_1順時針轉φ_2角度$=\omega-360^\circ$即得。不論那一個情況下，我們都得到同一個最α_2的方向，因為$\varphi_1=\varphi_2+360^\circ$，所以一般我們可用$\varphi_1+360^\circ\cdot n$或$\varphi_1-360^\circ n$來表示（$\widehat{\alpha_1,\alpha_2}$），其中$n$為非負的整數＋或－號的選取視順時或反時針而定。

因而對任何（$\widehat{\alpha_1,\alpha_2}$）的兩個量度$\phi_1$及$\phi_2$我們總有

$$\phi_1-\phi_2=360^\circ\cdot k;\quad k\text{ 為一整數。}$$

現我們來看如何利用上面的分析來測定一多邊形任何兩邊的夾角。先就拿$\overrightarrow{A_1A_2}$及$\overrightarrow{A_3A_4}$兩邊來看。即（$\widehat{\alpha_1,\alpha_3}$）此角度不是由$\alpha_1$ 直接旋轉到α_3，中間經過α_2，所以有（$\widehat{\alpha_1,\alpha_3}$）＝（$\widehat{\alpha_1,\alpha_2}$）＋（$\widehat{\alpha_2,\alpha_3}$）。（不論$\widehat{\alpha_1,\alpha_2}$及$\alpha_3$的相對位置如何！）

令 $\varphi_1=(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_2A_3}})=(\widehat{\alpha_1,\alpha_2})$,

$\varphi_2=(\widehat{\alpha_2,\alpha_3})$, ……………………

$\varphi_k=(\widehat{\alpha_k,\alpha_{k+1}})$ ……………………

則我們有

$(\widehat{\alpha_1,\alpha_3})=\varphi_1+\varphi_2$

$(\widehat{\alpha_1,\alpha_4})=(\widehat{\alpha_1,\alpha_3})+(\widehat{\alpha_3,\alpha_4})=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$

$\vdots$

$(\widehat{\alpha_2,\alpha_4})=\varphi_2+\varphi_3$, $(\widehat{\alpha_2,\alpha_5})=\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4$

……………………………

一般有

$$(\widehat{\alpha_i,\alpha_{i+k}})=\varphi_i+\varphi_{i+1}+\cdots+\varphi_{i+k-1} \tag{5.8}$$

今回憶一個無定向三角形$A_1A_2A_3$的面積為

$$S=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot A_2A_3\cdot\sin\varphi;$$

φ為頂角A_2的角度。

而定向三角形$A_1A_2A_3$之定向面積

（$A_1A_2A_2$）

$=\frac{1}{2}A_1A_2 \cdot A_2A_3 \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_2A_3}})$

即 $S(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{2}a_1a_2\sin(\widehat{\alpha_1,\alpha_2})$,

其中 $a_1=|A_1A_2|$, $a_2=|A_2A_3|$

$$S(\alpha_i,\alpha_{i+k})=\frac{1}{2}a_ia_{i+k}\sin(\widehat{\alpha_1,\alpha_{i+k}})$$

其中 $a_i=|A_iA_{i+1}|$。

將此代入式(5.7)中，我們可得

$$\begin{aligned}
&2S(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n-1})\\
&=a_1[a_2\sin\varphi_1+a_3\sin(\varphi_1+\varphi_2)+\cdots\cdots\\
&\quad+a_{n-1}\sin(\varphi_1+\cdots+\varphi_{n-2})]\\
&\quad+a_2[a_3\sin\varphi_2+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}\sin(\varphi_2\\
&\qquad+\cdots\cdots+\varphi_{n-2})]\\
&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad+a_{n-2}[a_{n-1}\sin\varphi_{n-2}]
\end{aligned}\tag{5.9}$$

注意：公式(5.9)告訴我們任何一個多邊形的面積可由其邊長及相鄰邊的夾角的資料即可求得。

有了公式(5.9)我們就可用來量各式各樣多邊形的面積，例如下面一個形式的多邊形面積(圖5.4)。

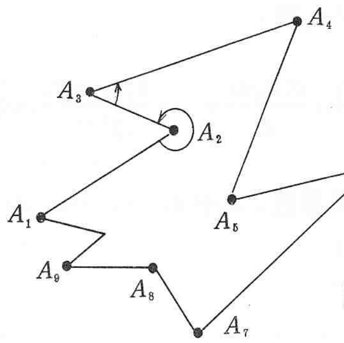

圖5.4

最後我們舉定向多邊形面積在證明三角恒等式的一個應用作為本文的結束。

定理9：設 $\omega=\frac{360°}{n}$，n為正整數，則

$$\begin{aligned}
&\sin(n-2)\omega+2\sin(n-3)\omega+\cdots\cdots\\
&+(n-3)\sin2\omega+(n-2)\sin\omega\\
&=\frac{n}{2}\cot\omega
\end{aligned}\tag{5.10}$$

證：今在單位圓內作一內接正n邊形。則由平面幾何及三角學得知此正多邊形面積S為：

$$S=n\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{360°}{n}=n\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\tag{5.11}$$

另一方面，設此多邊形的一邊邊長為a，則$a=2\sin\frac{\omega}{2}$(參看圖5.5)

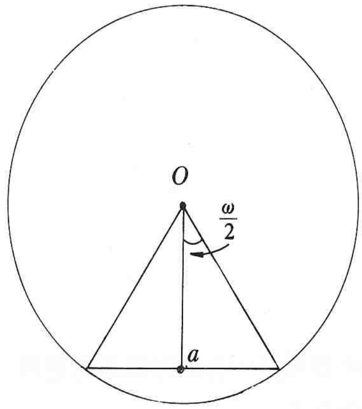

圖5.5

依據公式(5.9)我們有

$$\begin{aligned}
&n\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}=S\\
&=4\sin^2\frac{\omega}{2}[\sin\omega+\sin2\omega+\cdots+\sin(n-2)\omega\\
&\qquad+\sin\omega+\cdots+\sin(n-3)\omega\\
&\qquad+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad+\sin\omega]
\end{aligned}\tag{5.12}$$

式(5.10)因此得證。

值得一提的是此題目如果用一般三角幾何的方法來證明是相當困難的。有興趣的讀者，不妨試用平時熟習的證法來證明一下。

本文承審核先生提出不少寶貴的見解及更正了若干處的疏失，而作了適當的修改，特此申謝。

參考資料

1. A.M.Lopshits "*Computation of Aera of Oriented Figures*" 俄文英之翻譯本 D.C.Heath and company 1963.