



書名：數學傳播季刊選輯②：  
數學的本質與方法(一)

作者：李國偉 朱建正 林聰源 黃敏晃  
戴久永 賴漢卿 劉太平 張憶壽  
楊維哲

出版者：中央研究院數學研究所

時間：民國74年6月出版

劃撥帳戶：中央研究院數學研究所

劃撥帳號：0100434-8

售價：50元

評

「數學傳播季刊選輯②」

## 數學的本質與方法(一)

康明昌

(一)

剛好是二十年前，我還是在高中二年級的學生，國內開始採用數學新教材 SMSG 課程。我們是採用舊教材的最後一屆，也就是說，最後一批的「落伍者」。為了趕上時代潮流，和其他人一樣，我也努力看一些「新數學」的書。使我吃驚的是，「新數學」的書竟如此的少。學校圖書館裏有朱言鈞、余介石寫的書（介紹 Dedekind 切割、射影幾何、群），可是那是大陸時期的老書。當時市面流行的新數學的小冊子都是講集合論、等價關係、一對一對應這些時髦的觀念。難道這竟是新數學嗎？

我想，即使是二十年後的今天，許多人仍然不瞭解，現在的數學家究竟在做些什麼事？

可是有許多數學家並不願意回答類似「數學是什麼？」這種問題。誰願意回答那些包容萬象的大問題呢？的確有許多專業數學家對於

「數學是什麼？」感到難以給予一個適當的答覆。但是這卻增加一般人對數學的誤解，增加數學家 and 一般人之間的隔閡。

感謝「數學傳播季刊」為專業數學家、數學教師和社會大眾搭起的橋樑。也感謝十年來國內數學家努力向社會大眾解釋「數學是什麼？數學家在做什麼事情？什麼是比較典型的數學方法？」所奉獻的心力，雖然在不同的層次他們也同樣的為這些問題所困擾。

「數學的本質與方法(一)」這本書收集九個作者，十二篇文章。他們希望以淺顯的方式介紹數學的本質與方法。高中學生或高中以上的學生，只要對數學有興趣，應該有能力看懂這些文章。

這不是一本經典性的著作，讀者不必期望它對於數學的本質與方法有哲學性的完整而且圓滿的處理。但是它可以傳達一些訊息，這些訊息是二十年前的中學生很難獲得的。

假設你是一個高中學生，你的鄰居恰好是一個數學家，你每個星期天晚上都可以到他家去聊聊天，請教一些問題。你想，他會告訴你

什麼事情呢？數學的新柏拉圖主義嗎？ $\pi$ 是超越數的證明嗎？範疇理論（category theory）與Weil猜想（Weil conjecture）的證明嗎？不，不，這都太嚴肅了。他可能只想很不拘形式、很不嚴謹的談一談近世數學的幾個特徵，談一談他專業工作（數學研究）的性質與他的工作習慣。你可能已經學了很多解題技巧，他設法在一個更寬廣的、更深入的角度把這些技巧融匯成幾種基本的手法。

可以說，「數學的本質與方法(一)」就是這麼一本書。你找不到包容一切問題的最終答案，因為作者並沒有這麼大的雄心。作者以娓娓清談的方式，從許多角度告訴讀者，他所瞭解的數學。

## (一)

這本書一共有十二篇文章。我先把目錄抄在下面，以供讀者參考。

1. 李國偉：數學的本質
2. 李國偉：數學本質與數學教育
3. 朱建正、林聰源譯：數學——人類無形的文化
4. 朱建正譯：數學家之社會特性及工作
5. 黃敏晃譯：泛談數學思考的本質
6. 戴久永譯：數學真理會隨時間改變嗎？
7. 賴漢卿：有關數學的學習方法
8. 劉太平：數學一、二
9. 張憶壽：數學解題法中的特殊化和一般化原理
10. 黃敏晃：數學裏的極端化原則
11. 楊維哲：談類推與轉換——兩個例子
12. 楊維哲：談輾轉相除法

與初學者談數學，最容易的方法莫過於多

舉實例。第5篇黃敏晃先生的文章極適合初學者。這篇文章寫得生動有趣，又引導讀者來到某些數學領域的大門前面，如整數論、公設化方法。

第1與2篇李國偉先生的文章則是以比較嚴肅的態度探討數學科學的基礎問題，如現代數學的特徵與本質。這是許多數學家不敢也不能寫的文章，因為數學與哲學的距離已經越來越遠，今天的數學家很少有古希臘時代數學家的哲學素養。但是不能否認的，數學哲學是一個重要的課題。李國偉先生的文章非常扼要的概括近代數學的精神與內涵。我期盼這是一本完整的「數學哲學」著作的寫作大綱。

如果說以上三篇文章想要用比較有系統的方式介紹數學，那麼第3、4、6、7篇文章就是不拘形式的數學漫談。

Bers與Sullivan是當代很有成就的數學家。Bers是美國哥倫比亞大學的教授（已退休），Sullivan是法國的高等科學研究所的教授。他們在第3篇文章談了許多他們對數學的看法（例如，好的數學是怎樣產生的？），他們也談到自己是怎樣走上數學研究這條路。第39頁Sullivan的談話值得讀者仔細玩味。許多數學理論或有名的數學定理的核心概念都是很單純、很自然的，能夠洞見這些核心而不被其他的枝節現象所迷惑，才算真正掌握了這種數學理論。

Poincaré 猜測是一個很重要的數學問題（請參考本文第(三)節關於Poincaré猜測的說明）。不用說，如果有人能夠解決Poincaré猜測，他就立刻一舉成名了。第4篇文章以社會調查的方式訪問許多研究Poincaré猜測的數家。它描寫學術界緊張激烈的競爭，道盡學術生涯的焦慮。

第6篇文章以微積分的理論基礎很具體的說明所謂「嚴謹的證明」在不同的時代可以有不同的要求。第7篇文章是幾個日本科學家（不是數學家）談論他們學習數學的方法。

第8~12篇文章介紹一些常見的數學手法

。高中學生唸數學時，可能會以為這裏有一個技巧，那裏又有一個技巧；數學老師好像個魔術師，口袋裏永遠裝滿許多小把戲。——其實在各種技巧的背後隱藏一些（並不多！）典型的數學方法。學生如果能掌握這些手法，就不怕那些小技巧如何千變萬化了。

這本書代表國內數學家在數學教育的一項努力。謝謝這本書的每一位作者，他們的辛勞與成果值得最熱烈的鼓掌。

### (三)

以下是三點補充意見。

1. 第4篇文章沒有說明 Poincaré 猜測的內容。讀者或許有興趣知道。

**Poincaré 猜測：**是否任一單連通的三維緊緻拓樸流形必與三維球面同胚（homeomorphic）？

**廣義的 Poincaré 猜測：**若  $M$  是  $n$  維（ $n \geq 3$ ）單連通緊緻拓樸流形，且  $M$  的同倫群（homotopy groups）與  $n$  維球面的同倫群一樣，是否  $M$  必與  $n$  維球面同胚？

答案是肯定的，如果(1)  $n \geq 5$  且  $M$  是微分流形（Smale, 1961），(2)  $n \geq 5$ （M. H. A. Newman, 1966），(3)  $n = 4$ （M. Freedman, 1982）。但是原來的 Poincaré 猜測（ $n = 3$ ）仍然沒有解決。

2. 第5篇文章 78 頁的註 2 可能需要加以補充。和 Poincaré 猜測一樣，黎曼猜測（Riemann hypothesis）也是一個非常熱門的

數學問題。

Matsumoto 並不是想證明黎曼猜測。

1984 年秋天他在法國發表論文時，突然有人發覺：「如果這個結論是正確的，豈不是可以證明黎曼猜測？」可是不久大家就發現 Matsumoto 的推論有幾個不夠清楚的地方。

Matsumoto 想把嚴謹的證明找出來。有兩三個地方安排他去演講黎曼猜測，可是在最後關頭這些演講都取消了。可以這樣說：Matsumoto 不再宣稱他能夠證明黎曼猜測。

3. 和這本書「數學的本質與方法(一)」同樣程度的書籍，國外的書多得不得了，並且許多人都都很熟悉。我列舉三本水準高一點的同性質的書在下面，說不定是我們未來工作的另一個方向：

P. J. Davis and R. Hersh, *The Mathematical Experience*, 「六藝出版社」翻印本。

J. Dieudonné, ed., *Abrege d' Histoire des Mathematiques 1700~1900*, 2 vols, Hermann, 1978, Paris。

T. L. Saaty, ed., *Lectures on Modern Mathematics*, 3 vols, John Wiley & Sons Inc., 1963~65, New York。

—本文作者任教於台灣大學數學系—