9302 最小非負整數的排列法（黃華民提供）

用歸納法定義 $a(i, j)$，$i = 0, 1, 2,$

……，$j=0,1,2,$……，如下：$a(0,0)=0$，$a(i,j)$是不出現在$a(i,0)$，$a(i,1)$，……，$a(i,j-1)$及$a(0,j)$，$a(1,j)$，……，$a(i-1,j)$的最小非負整數。求$a(i,j)$是多少。

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

註：上期9302題目有誤，本期更正如上。

參考解答（張鎮華提供）：

首先我們做了一個實驗，把$a(i,j)$的表列出來，觀察裏面的性質。下表是用計算機印出來$i,j=0,1,$……，15的結果。

首先我們觀察到兩件事情：㈣$a(i,i)=0$對所有i都成立；㈡$a(i,j)=a(j,i)$對所有i,j都成立。更進一步的觀察可以發現，如果將$0\leq i,j\leq 2^{n+1}-1$的表分成四塊B_1,B_2,B_3,B_4。

$B_1=\{a(i,j):\ 0\leq i\leq 2^n-1$ 且 $0\leq j\leq 2^n-1\}$

$B_2=\{a(i,j):\ 0\leq i\leq 2^n-1$ 且 $2^n\leq j\leq 2^{n+1}-1\}$

$B_3=\{a(i,j):\ 2^n\leq i\leq 2^{n+1}-1$ 且 $0\leq j\leq 2^n-1\}$

$B_4=\{a(i,j):\ 2^n\leq i\leq 2^{n+1}-1$ 且 $2^n\leq j\leq 2^{n+1}-1\}$

可以發現B_1和B_4完全一樣，B_2和B_3完全一樣，而且B_2的元素只不過是在B_1相對應的位置加上2^n而已。由這個觀察可以列出這樣的遞迴公式：當$0\leq i,j\leq 2^n-1$時，

$a(i,j)=a(2^n+i,2^n+j)$且

$a(i,2^n+j)=a(2^n+i,j)=a(i,j)+2^n$。

反覆的利用這個公式，就可以算出$a(i,j)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

的值，方法如下述。首先將 i 和 j 的二進位表示法寫出來 $i=\sum_{r=0}^{n} x_r 2^r$（其中 x_r 為0或1），$j_m=\sum_{r=0}^{n} y_r 2^r$（其中 y_r 為0或1），假設 $i_m=\sum_{r=0}^{m} x_r 2^r$ 且 $j_m=\sum_{r=0}^{m} y_r 2^r$（其中 $m=0,1,\cdots\cdots,n$），則 $i=i_n$ 且 $j=j_n$。

$$a(i_n,j_n)=a(i_{n-1},j_{n-1})+z_n 2^n \qquad \text{其中 } z_n=x_n \text{ XOR } y_n$$

$$a(i_{n-1},j_{n-1})=a(i_{n-2},j_{n-2})+z_{n-1}2^{n-1} \qquad \text{其中 } z_{n-1}=x_{n-1} \text{ XOR } y_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$a(i_0,j_0)=z_0 2^0 \qquad \text{其中 } z_0=x_0 \text{ XOR } y_0$$

請注意在上述的計算過程中 $z_r=x_r$ XOR y_r 表示 exclusive or，也就是當 $x_r=y_r$ 時 $z_r=0$，當 $x_r\neq y_r$ 時 $z_r=1$。所以

$$a(i,j)=a(i_n,j_n)=\sum_{r=0}^{n} z_r 2^r \text{。}$$

因此我們做下面大膽的假設：

(*) $a(i,j)$ 等於將 i 和 j 表成二進位做 XOR 所得結果。

以上不是一個證明，因為所用的遞迴公式是觀察得到的，為了取信於大家，我們將用數學歸納法證明(*)成立。

當 $i+j=0$ 時，$i=j=0$，$a(0,0)=0$，所以(*)成立。

假設 $i'+j'<i+j$ 時(*)成立。令 i 及 j 的二進位表示法分別是 $\sum_{r=0}^{n} x_r 2^r$ 及 $\sum_{r=0}^{n} y_r 2^r$，且設 $k=\sum_{r=0}^{n} z_r 2^r$ 其中 $z_r=x_r$ XOR y_r。對於任意 $0\le k'<k$，存在 s 使得 $z_s=1>0=z_s'$，$z_r=z_r'$（$r=s+1,s+2,\cdots\cdots,n$）其中 $k'=\sum_{r=0}^{n} z_r' 2^r$。因為 $z_s=1$，可假設 $x_s=1$ 且 $y_s=0$，如果取 $i'=\sum_{r=0}^{n} x_r' z^r$，其中 $x_r'=x_r$（當 $r>s$ 時），$x_s'=0$，$x_r'=y_r$ XOR z_r'（當 $r<s$ 時），則 $i'<i$ 而且 $k'=i'$ XOR j，由歸納法假設 $k'=a(i',j)$。類似的說法很容易可以證明 k 不出現在 $a(i',j)$ 及 $a(i,j')$ 中（其中 $0\le i'\le i-1$，$0\le j'\le j-1$），所以 $a(i,j)=k$，也就是(*)成立。