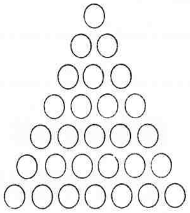
問題詳解：

9301 覆蓋個數（張鎮華提供）

將 $1+2+\cdots\cdots+n=n(n+1)/2$ 個小

圓圈排列如下圖。



（ $n=7$ 的例子）

試問，最少要用多少個 或 才可以將上圖完全覆蓋住？如果用 $f(n)$ 表示這個數目，則 $f(1)=f(2)=1$ ，$f(3)=3$ ，$f(4)=4$ ，一般而言，$f(n)\geq n(n+1)/6$ ，問題是 $f(n)=?$

參考解答 I（張鎮華提供）：

小圓圈的總數是 $n(n+1)/2$，所以最少要用 $n(n+1)/6$ 個 或 （以下稱爲二階三角形）才可以將整個圖蓋住，也就是 $f(n)\geq n(n+1)/6$ 。事實上

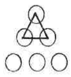
$$n(n+1)/6=\begin{cases}0 \pmod 6 & \text{當 } n=0,2 \pmod 3,\\ 2 \pmod 6 & \text{當 } n=1 \pmod 3。\end{cases}$$

因此 $f(n)\geq\lfloor (n^2+n+4)/6\rfloor$ 其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示小於或等於 x 的最大整數。最好的情況是能用 $n(n+1)/6$ 個不重疊的二階三角形蓋滿（當 $n=0$ 或 $2 \pmod 3$ 時），或者用 $(n^2+n-2)/6$ 個不重疊的二階三角形蓋得最後只剩下一個小圓圈（當 $n=1 \pmod 3$ 時）。將

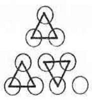
$n=1, 2, \cdots\cdots, 9$ 做實驗得知，除了 $n=3, 5, 6, 8$ 以外，都是好的情況。在這四種特殊情況，我們可以用 $n(n+1)/6-1$ 個二階三角形將大部分小圈蓋住，只剩下排成一直線的三個小圓圈，這時另外得再用兩個二階三角形才可以蓋滿，見下圖。

$n=1$

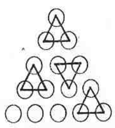
$n=2$



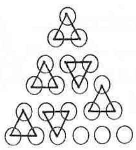
$n=3$



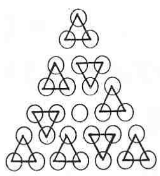
$n=4$



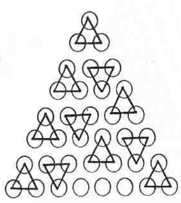
$n=5$



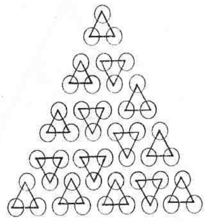
$n=6$



$n=7$



$n=8$

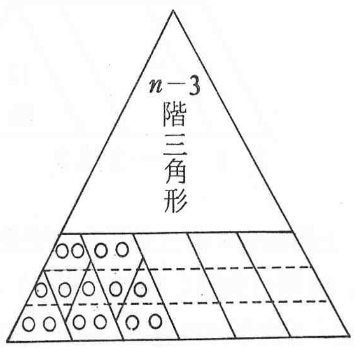


$n=9$

爲了方便，如果大三角形可以用〔$(n^2+n+4)/6$〕個二階三角形覆蓋，我們稱爲「完全覆蓋」(exact cover)，此時 $f(n)=$〔$(n^2+n+4)/6$〕；如果可以用〔$(n^2+n+4)/6$〕$+1$ 個二階三角形覆蓋，則稱爲「超一覆蓋」，比時〔$(n^2+n+4)/6$〕$\leq f(n) \leq$〔$(n^2+n+4)/6$〕$+1$，但是我們不能確定 $f(n)$ 是那一個，例如 $n=3, 5, 6, 8$ 的情形，我們會造出一個超一覆蓋，但要說明此時沒有完全覆蓋就要花許多功夫，最笨的方法是將「所有」可能的蓋法都試過，去證明完全覆蓋不可能，但這種方法在 n 較小的情況容易，當 n 很大時就不容易。

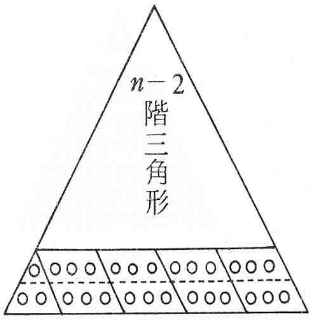
性質 1.： 如果 n 爲偶數且 $n-3$ 階三角形有一完全(或超一)覆蓋，則 n 階三角形就有一完全(或超一)覆蓋。

證： 將 n 階三角形分成兩部分，一部分是上面的 $n-3$ 階三角形，其餘是最下面三列，含 $3n-3$ 個小圓圈。如圖可見這三列可以被完全覆蓋，所以得證。

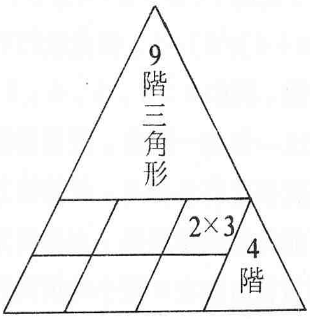


性質 2： 如果 $n=3k+2$ 且 $n-2$ 階三角形有一完全(或超一)覆蓋，則 n 階三角形就有一完全(或超一)覆蓋。

證： 方法類似性質 1.的證明，考慮下圖。

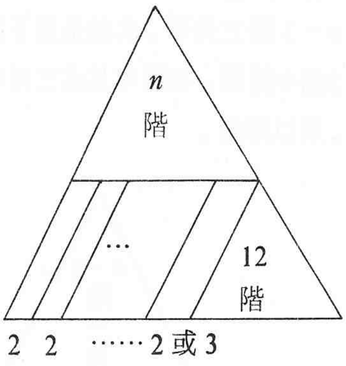


$n=7$ 時有完全覆蓋，所以 $n=10$ 時也有（性質1.）；$n=9$ 時有完全覆蓋，所以 $n=11$ 時也有（性質2.），$n=12$ 時也有（性質1.）。$n=13$ 的可以用下圖說明有完全覆蓋。



性質3：如果 $n\geq 2$ 且 n 階三角形有完全（或超一）覆蓋，則 $n+12$ 階三角形就完全（或超一）覆蓋。

證：將 $n+12$ 階三角形分割如下圖。



上圖包含 n 階三角形（有完全或超一覆蓋），12階三角形（有完全覆蓋），$[n/2]-$ 個 12×2 的平行四邊形（有完全覆蓋），及一個 12×2 或 12×3 的平行四邊形（有完全覆蓋），所以整個大三角形有完全（或超一）覆蓋。

由以上性質可以得到下面的結論：

㈠ $n=1,4,7,10\ (\text{mod } 12)$ 時，可以用 $(n^2+n-2)/6$ 個二階三角形將 n 階三角形蓋住，使得恰有一小圓圈未被蓋到。

㈡ $n=2,9,11,12\ (\text{mod } 12)$ 時，可以用 $(n^2+n)/6$ 個二階三角形將 n 階三角形完全覆蓋。

㈢ $n=3,5,6,8\ (\text{mod } 12)$ 時，可以用 $(n^2+n)/6-1$ 個二階三角形將 n 階三角形蓋住，使得剩下三個成一直線的小圓未被蓋到，所以再用兩個二階三角形可以構成一個超一覆蓋。但以上的論證沒有證明「不可能有完全覆蓋」這件事情，據說英國的 John Conway 會證明。

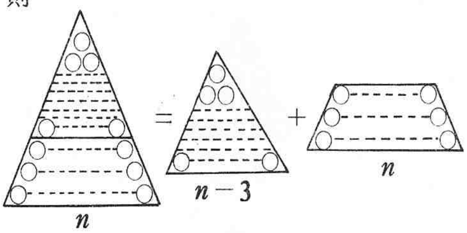
參考解答 II（楊穎堅提供）：

設 $F_e(n)$ 表 n 為偶數時所需個數

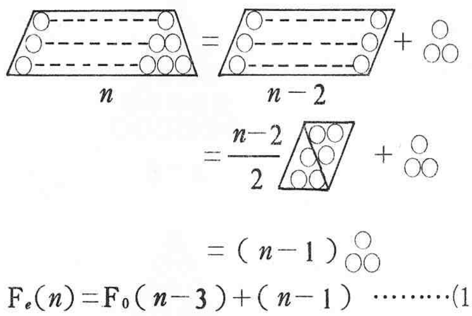
$F_0(n)$ 表 n 為奇數時所需個數

若 n 為偶數時：

則



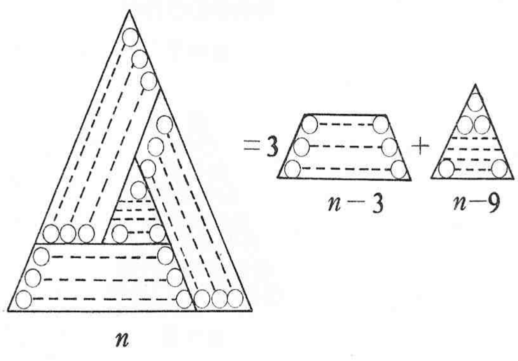
因為

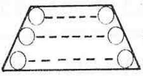
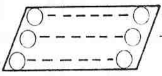


所以 $F_e(n)=F_0(n-3)+(n-1)$ ………(1)

若 n 為奇數時：

則



因爲 3  $= 3($  $+$  $)$

$n-3$ $\qquad$ $n-5$

$= 3(n-4)$ 

所以 $F_0(n) = F_e(n-9) + 3(n-4)$ ………(2)

由(1)得：

$F_e(n-9) = F_0(n-12) + (n-10)$ ………(3)

由(2)得：

$F_0(n-3) = F_e(n-12) + (3n-21)$ ………(4)

將(3)(4)分別代入(2)(1)得：

$F_e(n) = F_e(n-12) + (4n-22)$ …………(5)

$F_0(n) = F_0(n-12) + (4n-22)$ …………(6)

由(5)(6)知

$F(n) = F(n-12) + (4n-22)$ …………(7)

$F(n) = F(n-12) + 4n - 22$

$F(n-12) = F(n-12\cdot 2) + 4(n-12) - 22$

$F(n-12\cdot 2) = F(n-12\cdot 3) + 4(n-12\cdot 2) - 22$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$F[n-12(k-1)] = F(n-12k) + 4[n-12(k-1)] - 22$

相加得 $F(n) = F(n-12k) - 24k^2 + 2k(2n+1)$

其中 $k = \left[\frac{n}{12}\right]$

又 $n < 12$ 時，可由(1)，(2)式及畫圖求得

所以最後得：

$$F(n) = F\left(n - 12\left[\frac{n}{12}\right]\right) - 24\left(\left[\frac{n}{12}\right]\right)^2 +$$

$$2\left[\frac{n}{12}\right](2n+1)$$

但是 $F(1) = 1$，$F(2) = 1$，$F(3) = 3$，$F(4) = 4$，$F(5) = 6$，$F(6) = 8$，$F(7) = 10$，$F(8) = 13$，$F(9) = 15$，$F(10) = 19$，$F(11) = 22$ #