

數 學

——科學的語言？

蕭文強

設想你在鬧市中進行街頭訪問：「你認為數學是弄什麼的？」你猜會得到怎樣的答覆？

「不要騷擾我，數學與我何干？」「聽說數學教人如何賭博必贏，你不如教教我。」「懂數學便懂得解答很多絞腦汁的遊戲。」這些答覆是出於對數學的誤解。

「日常生活裏經常用到數學，例如買菜用多少錢？每月收入減去支出還剩下多少？」「科技發展倚靠數學，科學研究使用數學，企業管理也使用數學。」「數學就是解方程、計算積分、作圓作三角形等等。」「數學就是證明定理。」這些答覆依然是片面而已。

其實數學有更遼闊的天地，根本上你是生活在數學世界當中。你看，太陽、月亮、地球基本上都是個球體，氣球、肥皂泡、露珠也是個球體。化學晶體的結構是有幾何對稱的多面體，鸚鵡螺的剖面呈現一條對數螺線，海星的形狀是個五角星，牽牛花纏繞籬笆生長是沿着一條螺旋線，螺絲帽是個正六角形，雷達天線是個拋物面。鐵閘由很多菱形組成，橋樑的支架是個三角形，很多裝飾圖案基本上是互相扣合的正三角形、正正方形和正六角形。光線反射時入射角等於反射角，行星繞日運行的軌道是個橢圓，支配遺傳的DNA分子結構是條雙螺旋線。蜂巢由很多正六角形組成，而且每個

蜂房的底部是由三個全等的菱形組成，每個菱形的角都是規定的。這樣說，數學豈只是工具，它簡直就是大自然的語言！當我們意識到這點，便會產生以下的疑問：為什麼這個世界充滿數學？為什麼數學能有效地解釋這個世界的衆多事物？數學是根本存在於這個世界之中，抑或只是人類自由思維的產物？若是前者，如何解釋現代數學裏五花八門的人為公理化系統？若是後者，以人在宇宙中只不過是滄海一粟之渺小，又怎能用憑空想像出來的東西描述實際世界？

這些疑問，一直困擾着無數的哲學家、科學家、數學家。愛因斯坦（EINSTEIN）曾經說過：「宇宙間使人最不理解的事情就是它是可以理解的。」在一個題為「幾何與經驗」的講座上，他給以上問題的答覆是一句著名（但不易明白）的話：「就數學定理之涉及實在來說，它們並非是可靠和必然的；就其可靠性和必然性來說，它們並不涉及實在。」另一位著名物理學家維格納（WIGNER）也曾給了一個講座，題為「數學在自然科學上令人難以理解的有效性」，數學家漢明（HAMMING）也曾給了一個題目極相似的講座，叫做「數學的令人難以理解的有效性」，他們都針對以上問題作了精闢的分析。本文作者的學識修養遠未

臻此，在這篇文章裏只想就着一些科學史上的例子談談這個問題吧。

* * * * *

上古時代的人民對大自然各種現象既驚訝也敬畏，認為都是天神旨意，所謂「天尊不可問」。但人類畢竟是有思維能力的生物，漸漸天也可問了。公元前四世紀我國戰國時代的偉大詩人屈原便寫了一首「天問」，開首說：「曰：遂古之初，誰傳道之？上下未形，何由考之？冥昭晝闇，誰能極之？馮翼惟像，何以識之？」跟着他提出了一百七十二個問題，都是關於自然現象、社會現象、古代歷史、神話傳說，大胆地懷疑傳統觀念。很可惜，這種熱切求真知的慾望可沒在古代中國引起廣泛影響。雖然古代中國在科學和技術上作出了輝煌貢獻，但要追溯現代科學思想的精神源頭，我們不得不轉移到西方的希臘。

在公元前六世紀，有些希臘哲學家首先提出以理性認識世界的主張。例如泰勒斯(THALES)認為世上萬物是由物質構成，水乃萬物本原。畢達哥拉斯(PYTHAGORAS)在意大利南部開壇講學，吸引了一批信徒，並且成爲一幫又是學術性、又是政治性、又是宗教性的神秘組織，被後世稱爲畢氏學派。他們認爲萬物本原不是物質而是抽象的數，瞭解數即能瞭解天下萬物，故有「數即一切」之信念。他們正確地看到很多事物具有數的關係，可惜卻把數的作用片面誇大，於是有些說法流爲荒誕不經。不過，他們也做了不少重要的數學工作，更試圖用數學描述自然現象。譬如他們發現如果撥動一根弦線，它發出的音調隨弦線的長度變更；如果撥動幾根長度互成整數比率的弦線，它們便發出和諧悅耳的音調。(這個弦線振動問題，過了二千多年後再度成爲熱門話題，推動了數學發展。到了那個時候，人們才對這回事明白得更透徹，此乃後話。)

到了公元前四世紀，柏拉圖(PLATO)更進一步認爲大自然就是數學。他認爲客觀世界是變化無常而不實在的，只有理念世界才是永恒不變而實在的；真理是人對理念之認識，這種認識不能倚靠知覺，只能倚靠思維，數學就是這道橋樑。柏拉圖有句名言：「神永遠按幾何(指數學)規律辦事。」意思是說只有靠數學才能認識理念世界。他的學生亞里士多德(ARISTOTLE)後來另立門戶，提出不同的見解。他認爲客觀世界由物質構成，我們必須憑知覺認識客觀世界，數學幫忙我們瞭解客觀世界，但我們不能藉數學尋求最終的原因。雖然這種想法比較接近現代科學思想精神，現代科學思想的真正開始還得再多等二千多年，等到十七世紀初意大利科學家伽里略(GALILEO)提出他的主張。他認爲我們必須從大自然錯綜複雜的現象中抓緊兩個基本概念，就是物質和運動；科學研究必須按照數學研究的方法，從一些基本原理出發，用推理演繹尋求新的結果。當然，如果單是這樣，他的主張便和亞里士多德的主張沒大分別了。但伽里略超越前人的地方，在於他尋求基本原理的辦法。亞里士多德沒能擺脫老師柏拉圖的影響，他認爲真理獨立於客觀世界而存在，故尋求真理不靠知覺只靠思維。例如他認爲有兩種運動，就是自然運動和人爲運動；任何運動都受到動力和阻力的作用，沒有動力物體不動，沒有阻力物體瞬刻即走完路程；在自然運動中，動力來自物體的重量，而阻力來自它通過的介質。因此他得到結論：物體自由下落時，重的比輕的下落快些。伽里略卻認爲基本原理只能由觀察客觀世界而得，即是由實驗而來；而且從基本原理推論得的結果，也只能從實驗中去檢驗它是否正確。同時，伽里略又強調數學的作用，但他提出一個跟前人極端不同的見解，這個見解可以說是現代科學最重大的發現：自然科學不應着眼於「爲什麼？」而應着眼於「怎麼樣？」，換句話說，應該尋求定量描述而非定性解釋，數學能發揮作用就是在這一方面了。不過，當我

們累積足夠多「怎麼樣？」的解答，我們便有種感覺我們明白了「爲什麼？」。舉一個例子，爲什麼自由物體下落？因爲地球有吸力；爲什麼地球有吸力？因爲天下萬物都有引力；爲什麼有萬有引力？至少在目前沒有人能答覆這個問題。即使將來當科學家對引力和引力波的研究進展到某個階段，獲致更深刻的瞭解而答覆這個問題時，亦一定會因而揭露出更深刻一層的問題來。但是，我們知道萬有引力服從平方反比定律，由此我們能準確地推算天體運行，甚至預測天象，而且這些預測是可觀察和可量度的。因爲觀測結果是這麼準確無誤，我們便有種感覺我們明白了天體運行這個自然現象了。

讓我們看一個著名的例子，顯示伽里略如何重視數學推論，那即是他推翻亞里士多德關於物體下落的論斷的故事。通常聽到的故事說他跑上比薩斜塔放下兩枚重量不等的鐵球，它們同時抵達地面。雖然這故事說明實驗的重要，但沒有史實證據確定他曾做過這樣的實驗，而更重要者，是他從理論出發已得到物體自由下落速度與重量無關這個結論。他的數學證明簡練精悍，是一個漂亮的反證法示範：如果 A 比 B 重，按照亞里士多德的說法， B 比 A 下落慢些，所以 B 應把 $A + B$ (A 和 B 縛在一塊) 的下落速度拖慢，使 $A + B$ 比 A 下落慢些。但另一方面 $A + B$ 比 A 重，按照亞里士多德的說法， $A + B$ 卻比 A 下落快些。這是互相矛盾的，故亞里士多德的說法不能成立！

自從伽里略提出他對數學和科學的見解後，數學成爲瞭解大自然最有力的助手。他說了一句有名的話：「大自然的奧秘都寫在這本永遠展開在我們面前的偉大書本裏，如果我們不先學曉書本所用的語言就不能理解它……。這本書是用數學的語言寫成的。」十七、十八和十九世紀初期的數學家差不多都同時是科學家、天文學家，因此那個時代的數學發展跟自然科學發展是分不開的。牛頓 (NEWTON) 創立了微積分，但他也以天體力學、光學著稱後世

；達朗貝爾 (D'ALEMBERT)、歐拉 (EULER)、伯努利 (BERNOULLI)、傅里葉 (FOURIER) 對數學分析有重大貢獻，但他們也解決了弦線振動、熱傳導的問題；拉格朗日 (LAGRANGE) 和拉普拉斯 (LAPLACE) 是十八世紀後期的數學大師，但前者亦以解析力學聞名後世，後者也是當時最偉大的天文學家；高斯 (GAUSS) 被公認爲有史以來最偉大的一位數學家，差不多在每個重要的數學領域都留下功績，但他也在電磁學作出貢獻，而且還是哥廷根天文台主任。

到了十九世紀中葉，數學與科學還是攜手並進，相輔相成。一個最好的例子是麥克斯韋 (MAXWELL) 在 1865 年前後的工作，把當時所知的電磁現象通過數學處理總結爲著名的麥克斯韋微分方程組。其中最有趣的一條方程是關於磁場的旋量，原本是基於安培 (AMPERE) 由實驗得來的定律，但按照該定律寫下來的方程卻導致數學推論上的矛盾！爲了補救漏洞，麥克斯韋替方程加上一項，稱它作「位移電流」。其實早在 1820 年丹麥科學家奧斯忒 (OERSTED) 已經發現傳導電流可產生磁場，但麥克斯韋加上的一項，卻說明變化的電場也可產生磁場；而且不單止此，他還從方程組推論變化的電場在其附近產生變化的磁場，這變化的磁場又在其附近產生變化的電場，而這變化的電場又在其附近產生變化的磁場，……。這樣繼續下去，變化一路往外擴散，有如水面投下一石，水波往外擴散，故稱電磁波。麥克斯韋並且計算了電磁波的傳播速度，發現竟然等於光速，他於是聲稱光是一種電磁波。單就理論方面而言，麥克斯韋把電、磁、光和波運動有機地連繫起來，已經是一樁了不起的工作；更有意思者，這項發現促使科學家在實驗室裏找尋電磁波，過了二十四年後赫茲 (HERTZ) 找着了，再過八年後馬可尼 (MARCONI) 利用它實現了無線電通訊的夢想。麥克斯韋還在物理學史上扮演了一位承前啓後的角色，正是他的電磁學說帶來的疑難引致愛因斯坦創立他的相對論。

難怪赫茲讚嘆道：「我們有個感覺，這些數學方程有它們獨立的存在和自身的理解力。它們比我們聰明，甚至比發現它們的人還要聰明，因為我們從它們所取的比放進去的還要多。」當然，還有很多別的例子，譬如群論由解代數方程而來，但近代基本粒子的研究少不了它；線性代數和泛函分析由解線性方程組、線性微分方程組和積分方程而來，但近代量子力學的研究少不了它；非歐幾何由考慮歐氏幾何的公理而來，但相對論的研究少不了它；微分幾何和微分拓撲由研究曲線曲面而來，但近年來宇宙論和規範場的研究少不了它。而且，數學與自然科學的關係也不是單方面的，數學也欠了自然科學的人情。從古至今，很大部份的數學是為着深入瞭解大自然發展起來的，自然科學也繼續刺激數學深入的探討，例如最近規範場的研究帶來低維流形方面的新發現。

自十九世紀中葉以後，數學史上接二連三地發生了幾樁具革命意義的大事，改變了數學家對數學的傳統看法，也間接帶來數學與自然科學之間某種程度的疏遠。其中最具影響力的一樁大事就是非歐幾何的誕生。從古希臘至十九世紀初，人們一直把歐氏幾何看作理所當然，它不只描述我們所處的空間，它甚至是唯一的幾何，十八世紀後期的德國哲學家康德（KANT）便認為歐氏幾何乃獨立於人的經驗以外而存在的真理。高斯是第一個從數學意義上理解非歐幾何的人，但他因為害怕傳統壓力沒敢發表他的學說，直至1830年左右當鮑耶（BOLYAI）和羅巴契夫斯基（LOBACHEVSKY）分別發表了他們的非歐幾何學說後，他才在寫給鮑耶父親的信上透露自己早於三十年前已經做了同樣的工作！非常簡略地說，他們的幾何與歐氏幾何最不同的地方，在於通過一條直線以外的一點至少有兩條不同的直線與該直線平行。這回事卻帶來很多稀奇古怪的幾何性質，跟人的直觀毫不相符，使人懷疑這種幾何究竟有無內部矛盾。到了十九世紀後期，好幾位數學家利用歐氏幾何建立非歐幾何的模型，說

明了要是你接受歐氏幾何，你也得接受非歐幾何。這種匪夷所思的幾何，使數學家意識到數學不是要尋求「真理」，它只從某些假設出發合乎邏輯地推論某些結果。要是假設成立，則推論的結果也成立。但假設成立與否，那可不干數學的事，數學家索性把這些基本假設稱作公理，公理無所謂真假，主要是必須協調，即是不得自相矛盾。為了解決這個數學的協調性問題，德國數學大師希耳伯特（HILBERT）在本世紀初提出一個著名的方案（但後來證明了那是行不通的），後來被稱作「形式主義（FORMALISM）」。很可惜，每種主張最易受一般人接納的說法，往往是「庸俗化」的說法，數學上「形式主義」亦難倖免。它的「庸俗化」說法即是「數學是建立空中樓閣的符號遊戲」。不少人以為只要提出幾條邏輯上沒自相矛盾的公理，便是建立了一個數學系統；再從這些公理出發推論定理，便是做數學工夫。如果真的是這樣，我們的確難以理解數學為何這麼有效了。但其實數學絕非這麼一回事，它的創造必須借助知覺和直覺想像，公理是經醞釀、提煉、整理後才產生的。憑空捏造的公理系統，頂多只能提供智力習作，卻不會有旺盛的生命力。

不過，數學也的確有它「自由」的一面，正如十九世紀德國數學家康托爾（CANTOR）說：「數學的本質就是它的自由。」雖然我們常常以客觀事物作嚮導去創造數學事物，不容否認大部份的數學事物跟實際事物的關係，至少不是直接的。例如你在街上走，可不會碰上多項式，更不會碰上虛數。這樣一來，便引起一個疑問：是否我們戴上有色的「數學眼鏡」來看這個世界？我們運用自由思維創造了數學，再用數學去解釋事物，是否我們看見的只是自己想像中的世界呢？舉一個例子，試翻開一本化學手冊或者物理手冊，數數有多少個常數的頭一位數字是1、是2、……、是8、是9。你大概以為它們平均地出現吧？錯了，差不多百分七十的常數的頭一位數字是1、2、3

或4，只有百分三十左右的常數的頭一位數字是5、6、7、8或9吧。是否大自然對1、2、3、4有偏愛呢？仔細地分析這個問題，便知道並非是大自然有所偏愛，而是由於我們定義的十進制地位記數法，使大自然看似有所偏愛而已。這個「數學眼鏡」的說法聽來似乎有點可怕，但想深一層，科學何嘗不是那樣。科學家從眾多表面現象中企圖抽取一些簡單原理，這就是統一的過程；再從這些原理出發推論更多的現象，這就是預測的過程。統一加上預測，編織成一套理論。愛因斯坦在一篇題為「物理與實在」的文章結尾說：「物理是一套有邏輯的思想體系……，它的基礎彷彿不能從歸納經驗而得，只能從自由創作而來。」不過他接着說：「對這個體系的判斷，是基於從知覺去驗證那些推論而得的結果……」所以沒有一套理論是不可推翻的權威，正如伽里略說：「在大自然的法令面前，人間的權威算得什麼？」正是這樣，人類對自然的認識逐步深化，永無盡頭。在這探索過程中，數學一直起了重大的作用。

* * * * *

那麼，究竟數學是自由思維的產物？還是有它客觀的存在呢？我喜歡用以下的事作個譬喻。俄國文豪托爾斯泰（TOLSTOY）讓他的小說「安娜·卡列尼娜」裏的主人公臥軌自殺了，他的朋友埋怨作者對主人公太殘忍，安排了這樣悲慘的結局。你猜托爾斯泰怎樣回答他呢？他說他筆下的人物往往做出違反他本意的安排，連他自己也不喜歡，但他們做的卻是實際生活中要發生的事，是他們應該做的事；雖然人物是由作者塑造出來，但連作者本人對此亦感無可奈何！從這角度看，數學創造與文學創造實有異曲同工之妙。有人曾問哲學家懷德海（WHITEHEAD）：「你認為那一樣較重要，事物呢？抑或理念？」他不假思索即答道：

「當然是關於事物的理念囉（IDEA OF THINGS）。」我不妨來個「狗尾續貂」，提出還有「理念的事物」這回事（THINGS OF IDEA）。舉一個例子，變量是個概念，變量 x 的變化關係 ax^2+bx+c 也是一個概念，方程 $ax^2+bx+c=0$ 又是另一個概念，滿足方程的根也是一個概念。但比方寫下一條方程 $10x^2-6x+2=0$ ，它有沒有（實）根卻不再由你決定了；又或者二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有多少個根，也不再由你決定了。從你定義什麼叫做二次方程開始，這回事已經有客觀存在的答案。我想說的是：數學雖然是人類自由思維的產物，但它也有客觀存在的意思，而且在一定程度上這種思維反映了客觀世界的素材，只不過它們是經加工抽象吧。有趣的是，概念一經形成，它卻彷彿有了自己的生命，向着它應該生長的方向生長。

這樣看來，數學在自然科學的有效性，也就沒有那麼令人難以理解了。固然，數學史上亦有不少例子，數學的學說比它在實際上的應用早發現了百多年甚至數千年，前者如羣論，後者如圓錐曲線。但我們知道數學是研究量與形的性質、變化、關係、規律的學科，而宇宙萬物大部份是量與形的結合，所以這一點也就不是那麼神秘玄妙了。數學發展的過程，既有其它學科和社會活動對它的影響，也有它自身內部給它的刺激。片面追求立竿見影的應用或者沉醉於唯理論至高的美夢，都是不健康的態度，數學能帶引我們到那個地步呢？十九世紀法國數學奇才伽羅瓦（GALOIS）說得好：「這門科學（指數學）是人類思維的結晶，命定是用以探討真理而不是用以知悉它，是用以尋求真理而不是得到它。」