代數曲線論簡介

莫宗堅

〔1〕 在微積分學中，我們用部分分式的方式，可求下列積分的解

(1) $$\int f(x)dx$$

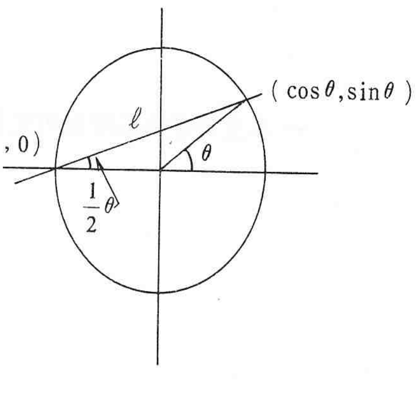
此處 $f(x)$ 是一個一元有理函數，進一步考慮

(2) $$\int f(\sin\theta\ ,\ \cos\theta)d\theta$$

此處 $f(\sin\theta\ ,\ \cos\theta)$ 是 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 的有理函數。令 $\sin\theta=y$ ，$\cos\theta=x$ ，那麼 x ，y 適合圓的方程式

$$x^2+y^2=1$$

如下圖



連接 $(-1\ ,\ 0)$ 及 $(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ 成一直線 ℓ。我們用直線 ℓ 得出圓的參數式如下，

$$\ell\ :\quad y=t(x+1)\quad ,\quad t=\tan\frac{\theta}{2}$$

與圓的方程式聯立求解並棄去 $x=-1$ ，$y=0$ ，得

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ y=\frac{2t}{1+t^2}$$

又有

$$-\sin\theta\, d\theta=dx$$

代入原積分式，立得

$$\int f(\sin\theta\ ,\ \cos\theta)d\theta$$
$$=\int h(t)dt$$

此處 $h(t)$ 是 t 的一元有理函數。

總結上面的討論，一般言之，我們可以討論下列的積分

(3) $$\int f(x\ ,\ y)dx$$

此處 $f(x,y)$ 是一個有理函數，而且 x ，y 適合下面代數方程

$$g(x,y)=0 \tag{4}$$

我們立刻可以把對(2)式的討論推廣到下面的情形：設(4)式有一有理參數表示式

$$\begin{aligned} & x=\alpha(t) \quad , \quad y=\beta(t) \\ & \alpha(t) \ , \ \beta(t) \in \mathbf{C}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

那麼(3)式可以變換成

$$\int h(t)dt \qquad h(t)\in \mathbf{C}(t)$$

因此可以歸結成(1)式，用部分分式求積分。

由此可見，(3)式的積分問題，可以歸結成(4)定義的“代數曲線”的性質問題。我們定義

定義：由(4)式定義的代數曲線 C_1，如有(5)式的有理參數表示式，則 C_1 的“虧格”(genus) 爲 0 。

〔2〕 在數學中，有三個概念是一致的；即

{ 無奇異點的複數射影代數曲線 }

≀

{ 緊緻Riemann（黎曼）曲面 }

≀

{ C 上超越度爲 1 的有限生成的域L }

以下我們將自由的交錯使用這三個概念，尤其是頭兩個概念。

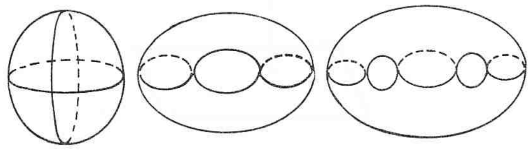
從拓撲學中，我們知道任取一個緊緻曲面 C_1，用三角畫分（ trianglezation ）分解 C_1。令 δ_0 = 點數，δ_1 = 線段數，δ_2 = 面數。那麼，我們恆有下面的公式。

Euler 特徵公式：

$$\begin{aligned} \text{Euler特徵} = \chi &= \delta_0-\delta_1+\delta_2 \\ &= 2-2g \end{aligned}$$

此處 g 是緊緻曲面 C_1 的“洞”數，也即虧格。

下圖繪出虧格是 0，1，2 的圖形。



$g=0$ $\qquad$ $g=1$ $\qquad$ $g=2$

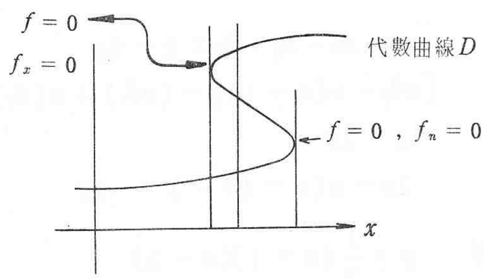
〔3〕 以下我們要用Euler 特徵公式及Bezout 定理，計算一個無奇異點的平面射影代數曲線 C_1 的虧格。

設齊次式 $f(x,y,z)=0$ 定義平面射影代數曲線 C_1。適當選取無窮遠線 $z=0$ ，使 $f(x,y,1)$ 與 $f_x(x,y,1)$ 在 $z=0$ 無交點。應用 Bezout 定理，立得

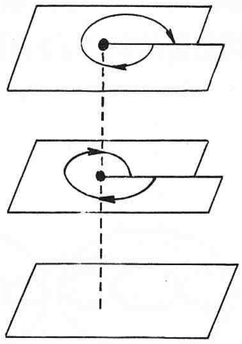
$$\#([f(x,y,1)=0]\cap[f_x(x,y,1)=0])=n(n-1)$$

此處 $n=\deg f(x,y,z)=D$ 的次數。

從代數幾何眼光來說，看下圖



$f=0$ 與 $f_x=0$ 的交點正是那些切線爲垂直線的點。從黎曼曲面的觀點來說，當從黎曼曲面 C_1 向 x 軸（相當C 加上無窮遠點，即成了球面）投影時，這些點的鄰近的兩點（或更多點）重合成一點了。因此相當於投影映射的分歧點，如下圖



適當選取投影方向，不妨假定，所有的垂直切線都是以二重點切於C_1。換句話說，所有的分歧點都是二重點。

我們可以用上面的安排，來計算D的虧格如下：在球面（x軸加上無窮遠點）上選取一個三角畫分，使垂直切線在x軸上的落點，都是三角畫分的點。令球面三角畫分的點數$=\delta_0$，線段數$=\delta_1$，面數$=\delta_2$，然後把這個三角畫分上升或黎曼曲面C_1的一個三角畫分。又令它的點數$=\Delta_0$，線段數$=\Delta_1$，面數$=\Delta_2$。顯然的，我們有下列的關係式

$$\delta_0-\delta_1+\delta_2=2$$
$$\Delta_0=n\delta_0-n(n-1)$$
$$\Delta_1=n\delta_1 \quad , \quad \Delta_2=n\delta_2$$

於是算出D的虧格g如下

$$\Delta_0-\Delta_1+\Delta_2=2-2g$$
$$[n\delta_0-n(n-1)]-(n\delta_1)+n(\delta_2)=2-2g$$
$$2n-n(n-1)-2=-2g$$

即 $$g=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

不難看出無奇異點的三次平面射影代數曲線的虧格是1。

〔4〕 與上面的討論類似的，我們可以得出Hurwitz公式如下

$$2g_{c_1}-2=n(2g_{c_2}-2)+\sum(\delta_i-1)$$

此處自黎曼曲面C_1到黎曼曲面C_2有一個n次代數覆疊映射，g_1是C_1的虧格，g_{c_2}是C_2的虧格，δ_i是各點的分歧指數。

〔5〕 我們回到積分(3)的討論

(3) $$\int f(x,y)dx$$

如把積分記號“$\int$”取消，則成了$f(x,y)dx$，稱為域$L=\mathbf{C}(x,y)$的微分形式（differential form）。

對於一個函數$f\in L=\mathbf{C}(x,y)$，我們可以計算它的零因子$(f)_0$（zero-divisor）及極因子$(f)_\infty$（pole-divisor）。

$$(f)_0=\sum n_ip_i \quad , \quad (f)_\infty=\sum m_jq_j$$

此處$(f)_0$是f的零點的形式和（formal sum），而n_i是零點p_i的重數。$(f)_\infty$是f的極點的形式和，而m_j極點q_j的重數。與複變函數類似的，不難證明，一個有理函數的零點數$=$極點數。換言之，我們有下列公式

$$\deg(f)\equiv\deg(f)_0-\deg(f)_\infty$$
$$\equiv\sum n_i-\sum m_i=0$$

對於一個微分形式fdx，以及任意點p_i，我們可以考慮$f\dfrac{dx}{dt}$在p點的零階n_i或極階m_i，此處t是在p_i點附近的參數。如此，我們可以定義fdx的因子為$\sum n_ip_i-\sum m_jq_j$，以及

fdx 的次數 $\deg(fdx)=\sum n_i-\sum m_j$。任取另一微分形式 gdy，則立得

$$\frac{fdx}{gdy}\ \text{是一函數}$$

因此，我們有

$$0=\deg\left(\frac{fdx}{gdy}\right)$$
$$=\deg(fdx)-\deg(gdy)$$

我們有下面的定義及定理

定義：任意微分形式 fdx 的因子 K 稱爲域 L 的典型因子（canonical divisor）。

定理：L 的任意兩個典型因子 k_1，K_2 有相同的次數。

此種典型因子的次數爲何？見下定理

定理：令超越次數爲 1 的域 L 的虧格爲 g（即與 L 相應的緊緻黎曼曲面的虧格是 g），fdx 是 L 的微分形式。那麼

$$\deg(fdx)=2g-2$$

證明：(1)設 $g=0$，$L=\mathrm{C}(t)$。我們僅須對 dt 證明 $\deg(dt)=-2$。顯然的，在 a 點時，$t-a$ 是它附近的參數，以及

$$\frac{dt}{d(t-a)}=1$$

所以 dt 在有限點 a 沒有零階或極階。在無窮遠點 ∞，$\tau=t^{-1}$ 是參數，以及

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{d\tau^{-1}}{d\tau}=-\frac{1}{\tau^2}$$

因此 dt 在無窮遠點 ∞ 有極階 2。因此我們證明了

$$\deg(dt)=-2=2\cdot 0-2$$

(2)以下對 $g>0$ 證明。令 $L=\mathrm{C}(x,y)\overset{n}{\supset}\mathrm{C}(x)=K$。取 dx 爲 K 及 K 的微分形式。我們有

對 K 計算　$\deg(dx)=-2=2g_k-2$

L 是 K 的 n 次代數覆疊。對非分歧點考慮，dx 對 K 的一個零點將上升到 L 爲 n 個零點。同樣的，dx 對 K 的一個極點將上升到 L 爲 n 個極點。我們現在對分歧點考慮，設 L 的點 q_i 爲分歧指數 δ_i 的對 K 的點 p_i 的覆疊。設 q_i 點附近的參數爲 t，則有

$$x=\varepsilon t^{\delta_i}\qquad \varepsilon(q_i)\neq 0$$

即　$$\frac{dx}{dt}=\delta_i\,\varepsilon t^{\delta_i-1}$$

於是 dx 在 q_i 點的零階爲 δ_i-1。綜上所述，不難看出（參考 Hurwitz 公式）：

對 L 計算　$$\deg(dx)=n(2g_K-2)+\sum(\delta_i-1)=2g_L-2\quad\text{（證完）}$$

〔6〕　令 D 是域 L 的一個因子。換句話說

$$D=\sum n_i p_i-\sum m_i q_i$$

以上的和是有限形式和（finite formal sum），p_i 及 q_i 是 L 的點（即 L 的賦值）。令

$$\deg D=\sum n_i-\sum m_i$$
$$\ell(D)=\dim_{\mathbf{C}}\{f\in L:(f)+D\geq 0\}$$

上面的不等式 $(f)+D\geq 0$ 即因子 $(f)+D$ 中無負項的意思。我們下列的着名定理

Riemann-Roch 定理：我們恒有

$$\ell(D)=\deg D-g+1+\ell(K-D)$$

此處K是一個典型因子。

我們將不證明Riemann-Roch定理，而是給出它的一些應用如下。

定理：$\ell((dx))=g$

證明：在Riemann-Roch定理中，取$K=D=(dx)$。此時$K-D=0$，$\ell(0)=\{$無極點的函數$\}$的維數$=\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1$，以[5]的定理的結果代入Riemann-Roch定理，立得

$$\ell((dx))=2g-2-g+1+1=g \quad \text{（證完）}$$

無極點的微分形式fdx稱爲L的正則微分形式。

定理：L的所有正規微分形式構成的向量空間的維數$=g$。

證明：fdx是正則的$\Leftrightarrow(fdx)=(f)+dx\geq 0$。於是自上定理立得定理。（證完）

〔例〕考慮下面的代數曲線C

$$f(x,y)=y^2-x(x-1)(x-2)=0$$

考慮(f,f_x,f_y)，不難看出C在所有的有限點都是非奇異的。在無窮遠點考慮問題，我們首先把$f(x,y)$齊次化，得出

$$F(x,y,z)=y^2z-x(x-z)(x-2z)$$

再求$z=0$（相當於無窮遠線）時的解。即$x=0$，$z=0$，$y\neq 0$。可令$y=1$，得出

$$z-x(x-z)(x-2z)=0$$

此曲線在$x=0$，$z=0$點顯然是非奇異的。因此我們知道此代數曲線是無奇異點的三次曲線。應用[3]的算式，立得

$$g=\frac{1}{2}(3-1)(3-2)=1$$

根據上定理，我們知道有一個正則微分形式。實際上，此微分形式可以如下算出

$$0=df=2y\,dy-[x(x-1)\cdot(x-2)]'dx$$

即
$$\frac{2dy}{[x(x-1)(x-2)]'}=\frac{dx}{y}$$

讀者自證$\dfrac{dx}{y}$即是所求的正則微分形式。

我們給出下面的定義

定義：設域$L\supset\mathbb{C}$，$\operatorname{trdeg} L/\mathbb{C}=1$，那麼，$L$的正則微分形式構成的向量空間的維數稱爲$L$的幾何虧格（geometric genus）。

於是上面的定理是說，一個無奇異點的代數曲線（或者說，一個緊緻黎曼曲面）的幾何虧格等於虧格。

本文是作者即將由聯經出版公司出版的大學用書「代數學」一書的附錄。

—本文作者任教於美國普渡大學數學系—