微方專題

格林函數

李正雄

Ⅰ.引言 公元 1828 年英國數學家格林喬治（George Green（1793～1841））曾在他的專論上敍述過一種特殊函數——即所謂格林函數（Green's function）。此方法的應用已廣泛地被肯定，尤其在微分方程上與理論解析上，足見其重要性。本文將在此方面作一簡單的介紹並舉例說明之。在微分方程上我們考慮它在一維空間上有關史都姆－李歐利型（Sturm-Liouville system）之求解；在理論解析上我們考慮其在二維空間（複數平面）上關於某些**調和函數**（Harmonic fuuction）之架構，藉此抛磚引玉，希望能對讀者有些助益。另外，本文之取材，大都由所列參考文獻編輯而成，有興趣的讀者，不妨深加探究。

Ⅱ.定義 爲了解說方便，我們需要一些名詞。考慮滿足下列偏微分方程式之實值函數 $u=u(x,t)$：

$$(2\cdot1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+c(x)u, \\ \qquad 0<x<\ell,\ t>0 \\ A\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)+B\,u(0,t)=0, \\ \qquad t>0 \\ C\dfrac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)+D\,u(\ell,t)=0, \\ \qquad t>0 \\ u(x,0)=f(x),\quad 0<x<\ell \end{cases}$$

式中 $a(x)>0$，A，B，C，D 及 ℓ 均爲實常數，$a(x)$，$b(x)$，$c(x)$ 爲可微函數，而 $f(x)$ 在富立葉級數（Fourier Series）上也扮演着重要角色。

我們常用分離法解 (2·1) 式，即令

$$(2\cdot2)\quad u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$$

將 (2·2) 式代入 (2·1) 式中，得到

$$(2\cdot3)\quad X(x)T'(t)=a(x)\cdot X''(x)\cdot T(t)+b(x)\cdot X'(x)\cdot T(t)+c(x)\cdot X(x)\cdot T(t),$$

因爲吾人尋求非零解，故可假設 $X(x)\cdot T(t)\neq 0$，將它除 (2·3) 式兩邊，可得

$$(2\cdot 4)\quad \frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{a(x)X''(x)+b(x)X'(x)}{X(x)}+c(x)$$
$$=\lambda$$

但上式等號兩邊爲不同變數且 $t>0$，故取 λ 爲負實常數。因此得到下面兩個常微分方程式：

$(2\cdot 5)\quad T'(t)=\lambda T(t)$

$(2\cdot 6)\quad LX=a(x)X''(x)+b(x)X'(x)+[c(x)-\lambda]X(x)=0$

因 $u(x,t)$ 仍應滿足 (2·1) 式之邊界條件，即：

$$(2\cdot 7)\quad \begin{cases} AX'(0)+BX(0)=0 \\ CX'(\ell)+DX(\ell)=0 \end{cases}$$

今 (2·5) 式常有解 $T(t)=K\exp\{\lambda t\}$，因此留下另一常微分方程式的問題：

$$(2\cdot 8)\quad \begin{cases} LX=a(x)X''(x)+b(x)X'(x)+[c(x)-\lambda]X(x)=0 \\ AX'(0)+BX(0)=0 \\ CX'(\ell)+DX(\ell)=0 \end{cases}$$

顯然，上式經常有零解 $X(x)=0$。

以下我們開始定義一些名詞，以便容後使用。

定義 2.1 (2·6) 式常被稱爲**自伴**(self-adjoint)微分方程式，如果對任何 $u,v\in C^{(2)}[0,\ell]$，存在一可微函數 $F(u,v,x)$ 使得 $uLv-vLu=\frac{d}{dx}F(u,v,x)$ 成立，而 (2·7) 式常被稱爲**正則**(regular)條件，如果 $F(u,v,x)|_0^\ell=0$。

定義 2.2 (2·8) 式常被稱爲形成一史都姆-李歐利型(Sturm-Liouville System)。而史一李問題即在對非零解尋求諸 λ 值，每一非零解常被稱爲**固有函數**(eigen function)，其對應之 λ 值常被稱爲**固有值**(eigen value)。

註 1 在 (2·8) 式中給定一些**固有譜值**(Spectra of eigen values)，以決定函數 $c(x)$ 之問題即所謂史一李之反問題，這是一個非常有趣的問題。

註 2 在 (2·6) 中如令 $p(x)=a(x)r(x)$，$q(x)=c(x)r(x)$，式中 $r(x)=\exp\{-\int_0^x\frac{a'(s)-d'(s)}{a(s)}ds\}>0$，則 (2·6) 可化成

$$(2\cdot 6\cdot 1)\quad LX=(p(x)X'(x))'+(q(x)-\lambda r(x))X(x)=0$$

顯然，(2·6·1) 式爲一**自伴**微分方程式。其實，再作進一步的變換 (2·8) 式常可化成如下常見的史一李標準型：

$$(2\cdot 6\cdot 2)\quad \begin{cases} u''(x)+(\widetilde{Q}(x)-\widetilde{\lambda})u(x)=0, \\ 0<x<1 \\ u(0)\cos\alpha+u'(0)\sin\alpha=0 \\ u(1)\cos\beta+u'(1)\sin\beta=0 \end{cases}$$

如何化法呢？這是一個很好的習題，讀者不妨試一試。

Ⅲ. 微分方程式上之格林函數

考慮下列**自伴邊界問題**(Self-adjoint Boundary Value Problem)。

$$(3\cdot 1)\quad \begin{cases} Lu(x)=(p(x)u'(x))'+(q(x)-\lambda)\ u(x)=-f(x), \\ a<x<b \\ Bu(a)=\alpha u'(a)+Bu(a)=0 \\ Bu(b)=\gamma u'(b)+\delta u(b)=0 \end{cases}$$

式中 $p(x)>0$，$p(x)$，$q(x)\in C^{(1)}[a,b]$，$f(x)\in C[a,b]$，以及**齊次自伴邊界問題**(Homogeneous Self-adjoint Boundary Value Problem)。

$$(3\cdot 2)\quad \begin{cases} Lu=(p(x)u'(x))'+(q(x)-\lambda)u(x)=0 \\ Bu(a)=\alpha u'(a)+\beta u(a)=0 \\ Bu(b)=\gamma u'(b)+\delta u(b)=0 \end{cases},$$

若 $\lambda=0$ 非爲**齊次自伴邊界問題** (3·2) 之一固有值，則吾人可定義**格林函數**如下：

定義 3.1 自伴邊界問題 (3·1) 之格林函數 $G(x,x')$，$a\le x$，$x'\le b$ 爲兩變數之函數，其對於變數 x 滿足如下四條件：

$(3\cdot 1\cdot 1)\quad LG(x,x')=0,\ x\neq x'$

(3.1.2) $BG(a,x')=0=BG(b,x')$
（邊界條件）

(3.1.3) $G(x,x')\in C[a,b]$（連續條件）

(3.1.4) $\left.\dfrac{\partial G(x,x'-0)}{\partial x}-\dfrac{\partial G(x,x'+0)}{\partial x}\right|_{x=x'}$

$=\dfrac{-1}{p(x)}$（跳續條件）

註3 上式之**格林函數**為唯一表示法，且以對稱形式出現，當它滿足正則條件，否則不具對稱形式。

註4 $\lambda=0$ 為固有值時之格林函數可參看所列參考文獻，又高階之格林函數又如何定義呢？這也是一個很好的習題。

用**格林函數**求解**自伴邊界問題**(3.1)可由下列定理表現出來：

定理3.2 若 $\lambda=0$ 非為**齊次自伴邊界問題**(3.2)之一**固有值**，則(3.1)式之解可由其格林函數 G（如定義3.1所述）表示如下：

(3.3) $u(x)=\int_a^b G(x,x')f(x')dx'$ 。

證明：因 $u(x)=\int_a^b G(x,x')f(x')dx'$，由 Leibnitz 法則，得知

$$u'(x)=\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x G(x,x')f(x')dx'+\frac{\partial}{\partial x}\int_x^b G(x,x')f(x')dx'$$

$$=\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}G(x,x')f(x')dx'+\int_x^b \frac{\partial}{\partial x}G(x,x')f(x')dx'，$$

又由跳續條件(3.1.4)得知

$$(p(x)u'(x))'$$

$$=p(x)\cdot\frac{\partial G(x,x-0)}{\partial x}f(x-0)+\int_a^x\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right]f(x')dx'$$

$$-p(x)\frac{\partial G(x,x+0)}{\partial x}f(x+0)+\int_x^b\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right]f(x')dx'$$

$$=-f(x)+\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right]f(x')dx'$$

故 $Lu(x)=-f(x)+\int_a^b LG(x,x')f(x')dx'$，

但 $x\neq x'$ 由條件(3.1.1)得知所證定理成立。

Ⅳ.例子

以下我們舉例說明如何找格林函數及利用它來求解。

例1

$$(4.1)\begin{cases} y''(x)=-f(x)\ ,\ x\in(0,1)\\ y(0)=0\\ y(1)=0\end{cases}$$ 。

解：因 $\lambda=0$ 非為(4.1)之固有值，故由(3.1.1)得格林函數如下：

$$G(x,x')=\begin{cases}A+Bx\ ,\ x<x'\\ C+Dx\ ,\ x>x'\end{cases}$$

由(3.1.2)知，$A=0$，$C=-D$，即

$$G(x,x')=\begin{cases}Bx\ ,\ x<x'\\ C(1-x)\ ,\ x>x'\end{cases}$$ 。

再由(3.1.3)連續條件知 $C=\dfrac{Bx'}{1-x'}$，

最後由(3.1.4)得知 $B=1-x'$

故所求格林函數為

$$G(x,x')=\begin{cases}x(1-x')\ ,\ x<x'\\ x'(1-x)\ ,\ x>x'\end{cases}$$ 。

再由定理3.2得其解為

$$y(x)=\int_0^x(1-x)x'f(x')dx'+\int_x^1 x(1-x')f(x')dx'$$ 。

例 2

$$(4.2)\begin{cases} y''(x)=2\ ,\ x\in(0,1) \\ y(0)=1 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

解：顯然 $\lambda=0$ 非為 (4.2) 之固有值，為應用例 1 之結果，令 $y(x)=1-x+u(x)$，則得

$$(4.2.1)\begin{cases} u''(x)=2\ ,\ x\in(0,1) \\ u(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases}。$$

由例 1 (4,1) 知 (4.2.1) 之解為

$$u(x)=\int_0^x x'(1-x)(-2)\,dx'+\int_x^1 x(1-x')(-2)\,dx'$$
$$=-(1-x)x^2-x(1-x)^2$$
$$=x^2-x$$

於是得到原式解為

$$y=(1-x)+x^2-x=(x-1)^2$$

下面我們舉一個非具對稱形式之格林函數，即不滿足正則條件之微分方程式：

例 3

$$(4.3)\begin{cases} u''(x)=0\ ,\ 0<x<1 \\ u(0)=0 \\ u'(0)=0 \end{cases}。$$

解：仿上，可知

$$G(x,x')=\begin{cases} 0 & ,\ x<x' \\ C+Dx & ,\ x>x' \end{cases},$$

再由連續條件與跳續關係得知

$$G(x,x')=\begin{cases} 0 & ,\ x<x' \\ x'-x & ,\ x>x' \end{cases},$$

顯然上式非為對稱之格林函數。

另外，我們也舉一個奇異格林函數的問題。

例 4
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{du}{dx}\right]-\left(\dfrac{v^2}{x}\right)u=0 \\ (v\geq 0)\ ,\ 0<x<1 \\ u(x) \text{ 當 } x\downarrow 0^+ \text{ 時，有界，} \\ \lim\limits_{x\uparrow 1^-} u(x)=0 \end{cases}$$

解：同理，仿上可得格林函數如下：

$$G(x,x')=\begin{cases} \left.\begin{aligned} & A+B\log x\ ,\ x<x' \\ & C+D\log x\ ,\ x>x' \end{aligned}\right\},\ v=0 \\ \left.\begin{aligned} & Ax^v+Bx^{-v}\ ,\ x<x' \\ & Cx^v+Dx^{-v}\ ,\ x>x' \end{aligned}\right\},\ v>0 \end{cases}。$$

再利用連續條件與跳續關係可得

$$G(x,x')=\begin{cases} \left.\begin{aligned} & -\log x'\ ,\ x<x' \\ & -\log x\ ,\ x>x' \end{aligned}\right\},\ v=0 \\ -(x,x')v/2v+\begin{cases} \left(\dfrac{x}{x'}\right)v/2v\ ,\ x<x' \\ \left(\dfrac{x'}{x}\right)v/2v\ ,\ x>x' \end{cases}\ v\neq 0 \end{cases}。$$

顯然，$G(x,x')$ 不恆存在，當 x 或 x' 趨近於零。

V. 理論解析上之格林函數

接着我們來探討在二維空間理論解析上之格林函數，它是以何種型態表現出來。

為了解說需要，我們敍述下列有名的**黎曼寫像定理**（Riemann Mappig Theorem）。

引理 5.1 令 $G\neq C$ 為簡單連通鄰域 (Simply Connected region)，且 $a\in G$，則唯一存在一解析函數（analytic function）$f:G\to C$ 具有下列性質：

(5.1.1) $f(a)=0$ 且 $f'(a)>0$，

(5.1.2) f 為一對一，

(5.1.3) $f(G)=\{z:|z|<1\}$。

定義 5.2 令 G 為複數平面上一鄰域且 $a\in G$，則格林函數 $g_a:G\to R$ 為在 a **奇異**（Singularity at a）且有如下性質：

(5.2.1) $g_a(z)$ 在 $G-\{a\}$ 上為調和函數（Harmonic function）

(5.2.2) $g(z)=g_a(z)+\log|z-a|$ 在 a 一圓盤上為調和函數。

(5.2.3) $\lim\limits_{z\to w} g_a(z)=0$，$\forall w\in\partial_\infty G$，(表 G 之邊界上)

由以上諸性質，我們可以得到下列命題，它告訴我們如何在複數平面上尋求格林函數。

命題5.3 令 G 表簡單連通鄰域，$a\in G$ 且令一對一解析函數，$f:G\to D=\{z:|z|<1\}$ 滿足 $f(G)=D$ 且 $f(a)=0$ 則在 G 上具有奇異點 a 之格林函數為 $g_a(z)=-\log|f(z)|$。

證明：由引理 5.1 知其存在且滿足

(a)因 f 為一對一解析函數，故 $f(z)\neq 0$，$z\neq a$，$z\in G$，於是，$\log|f(z)|$ 在 $G-\{a\}$ 上為調和函數。

(b)顯然，$g(z)=g_a(z)+\log|z-a|$

$=-\log\left|\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|$ 在 a 一圓盤上為調和函數。

(c)又 $\lim\limits_{z\to w} g_a(z)=\lim\limits_{w\to 1} -\log|w|=0$

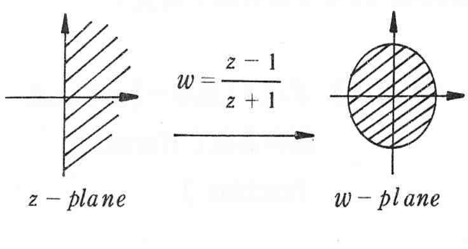
$\forall w\in\partial_\infty G$，故命題成立。

註5 上述格林函數 $g_a(z)$ 若存在則為唯一確定，且為正數，對所有 $z\in G-\{a\}$。

最後我們舉一個例子以為命題5.3之應用。

例5.4 試在 $G=\{z:Re\, z>0\}$ 上找一格林函數。

解：由莫比奧變換 (Möbius transformation) $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 知 $w:G\to D=\{z:|z|<1\}$，如下圖所示：



於是，命題5.3告訴我們所求格林函數為

$$g_1(z)=-\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right|$$

其實對任何 $a\in G$，吾人不難求得其格林函數為

$$g_a(z)=-\log\left|\frac{\dfrac{1-z}{1+z}-\dfrac{1-a}{1+a}}{1-\dfrac{1-\bar a}{1+\bar a}\ \dfrac{1-z}{1+z}}\right|$$

如何求得呢？這亦是一個很好的習題。

參考文獻

[1] J.A. Cochran, Applied Mathematics; Wadsworth, Inc., Belmont, California, 1982.

[2] E.A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations; McGraw-Hill, New York, 1955.

[3] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. I, II; Interscience, New York, 1953.

[4] J.B. Conway, Functions of one Complex Variable; Springer-Verlag N.Y. Inc. 2nd 1975.

[5] P.R. Garabedian, Partial Differential Equations; New York, Wiley, 1964.

[6] I. Stakgad, Green's Functions and Boundary Value Problems; Wiley, New York, 1979.

—本文作者任教於
國立成功大學數學系及應數所—