七十四學年度大學入學考試數學科

閱卷雜感

陳昭地

今年的大學入學考試又在大家的期盼、關切中過去了，它必然留下許多值得探討的問題。本文想就參與數學科閱卷的實際經驗，針對考生答卷情況，提出個人對當前數學教育的一些看法，提供給高中數學教師、社會大衆，尤其是未來準備參加大學聯考的考生等之參考。

壹、塡充題方面

這次的命題在試委員不事先公布各科題型的既定政策下，數學科非選擇題部分出現占分比率高達 40％的塡充題，由於塡充題的出現相對的原有之選擇題占分遽減，使得是否有需要再使用電腦來評閱選擇題的必要性，廣泛地受到社會大衆尤其是數學教師的關注。塡充題的命題答題有其特殊要求，由於這是近十年來第一次出現的題型，因此有些考生不知如何答題，以下我們舉出一些答塡充題所發生的問題:

(1)有些考生未依答卷說明作答，顯見考生情緒過於緊張或應變能力頗弱。

這次的塡充題之答題說明爲：

本題共有八個空格，每個空格 5 分，共40分，請答在「非選擇題試卷」上的第一欄，務必寫上格號（子，丑，…，未）後，再寫答案。（爲節省「非選擇題試卷」空間，本題作答，請不要寫演算過程。）

絕大多數的考生都能依答卷說明方式來作答，但極少數的考生的答卷方式頗有問題，例如：

①把演算過程一併寫出，其最後空格答案未指明。寫出演算過程會侵占其他演算證明題的答卷空間，應把演算過程寫在試題紙空白位置上；最後空格未指明會使閱卷先生產生閱卷上的困難。

②格號次序沒有寫清楚，部分可能來自於原試題空格使用“地支”爲格號次序，極少數的考生不熟悉其次序而有顚倒格號次序的困擾。

③把塡充題答在答卷紙的封面閱卷委員計分欄與簽名欄的位置；這可能是受到以往在國中時代或高中聯考，其答卷欄都有特別設計的習慣有關，當然也顯示考生過於緊張或應變能力

過差之緣故。

考試之前考生應具備有答題方式的基本常識，避免在考場時產生手忙脚亂不知手措的情形；在聯招閱卷制度未作大幅度改變之前，填充題的題型仍然是取代選擇題的良好方式，在聯招會未對答卷紙設計方式進一步改善以前，考生應注意到填充題答題的良好習慣。

例如，在答題之前先寫好格號次序，把演算在其他位置的答案，依其格號塡上，以這次考試爲例，把答卷紙打開，在第一欄的空格紙上，先依如下次序寫上：

一、塡充題	或	一、塡充題
㈠ ________		1.㈠ ________
㈡ ________		㈡ ________
㈢ ________		2.㈢ ________
㈣ ________		㈣ ________
㈤ ________		3.㈤ ________
㈥ ________		㈥ ________
㈦ ________		4.㈦ ________
㈧ ________		㈧ ___.____

再將演算在試題紙所得到的答案，依其正確格號塡上，沒做的暫時留空，等到有時間再回頭作補上答案即可。當然這次考題的格號次序以“地支”編號可能是基於“地支”應是基本常識且利用數字編號易與答案結果混淆的緣故，不過較佳的編號次序仍以數字或英文字母來編號爲宜，這樣可以避免非數學能力的困擾，如果以數字或英文編號，當然其答卷方式仍可仿上處理，僅以數字或英文編號依序取代㈠、㈡，…，㈧就可以了！

⑵受到長期使用選擇題測驗的影響，少數學生採用猜答方式作答。例如，社會組的塡充題每一個答案都寫成 5，或都塡成 −2，…；自然組的塡充題每一個答案都塡 3，或 3、2 交替塡寫，對這次的考題而言這樣的作答或許可得到若干分數，顯然它是屬於不勞而獲的分數，因此給我們若干的提示：

①顯見部分考生放棄數學，尤其社會組的考生更是明顯。

②將來設計塡充題的考題，其答案數據似宜更加謹愼設計，應避免可猜答得分不勞而獲的答案。

⑶塡充題的最大特色在於其答案頗爲統一，它是一種客觀式的測驗，閱卷不受主觀因素的影響，這當然是意謂著閱卷結果應能達到百分之百的準確性，它不是指正確的答案型式必然是唯一；當問題沒有特別指明清楚時，其答案型式習慣上認可的就可能是正確的結果；例如：

①自然組第 3 題求最小值㈤答成 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，或 $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$，或 $\dfrac{\sqrt{20}}{5}$，或 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 都是可被視爲正確的答案；部分考生答成 0.894，或 0.89，或 0.89…，或 0.894…，這樣的答案或許還會被視爲正確，惟在數學問題中，除非有特別的註明要求答出其近似值（這時通常會給出 $\sqrt{5}$ 的近似值），否則這樣的作答方式不是頂聰明的答法，甚且會致使計算錯誤而得到其他不能被接受的答案。

②社會組的第(d)題：

設 $z=\sqrt{3}\,i-1$ 而 $1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{101}=u+iv$，其中 u，v 均爲實數，則 $u=$ $\boxed{午}$，$v=$ $\boxed{未}$。

把 u 答成 $\dfrac{2}{7}(1-2^{102})$，或 $-\dfrac{2}{7}(2^{102}-1)$，或 $-2(1+8+8^2+\cdots\cdots+8^{33})$

把 v 答成 $\dfrac{\sqrt{3}}{7}(1-2^{102})$，或 $-\dfrac{\sqrt{3}}{7}(2^{102}-1)$，或 $-\sqrt{3}(1+8+8^2+\cdots\cdots+8^{33})$

都可視爲正確的答案。

因此，當考生作答塡充題與報章補習班的答案方式不完全相同時，用不著擔心而干擾了其他科目的應考，因爲你的答案可能還是被視爲正確呢！

(4)這次的填充題中幾個較普遍疏忽的問題，因而可能造成該可輕易得分而仍得不到分數的情形：

①自然組的第1題最大者答成－3，或8，或－8；最小者答成8，或－3，或3。其正確答案應爲：(子)3，(丑)－8，這樣錯誤的作答顯然是移項或最大、最小沒有分淸楚的疏忽因而少得10分，損失慘重。

②自然組的第2題之正確答案應爲 $8x^4-8x^2-x+1=0$，或 $2(1-2x^2)^2=x+1$ 等，但許多答卷發現相差一個或二個正、負號，如 $8x^4-8x^2-x-1=0$，$8x^4-8x^2+x+1=0$，……相當可惜。

③自然組第3題求曲線

$$S:\begin{cases} x=\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta+\sin\theta\ ; \end{cases}\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

則 S 上的點與原點的距離，最小值爲 $\boxed{辰}$，最大值爲 $\boxed{巳}$，部分考卷發現其答案互調，或者是把最小值答成 $\frac{4}{5}$，最大值答成4，忘記開平方；在在客觀給分原則下這樣的答案可能無法被接受，損失慘重！

④自然組第4題求從1到9876的自然數中，含0的數字共有幾個？如果從1，2，3，……，一直寫到9876時，一共要寫幾個0？這個問題部分考生沒有分類淸楚致使前功盡棄，事實上這個問題如果冷靜分析淸楚要拿這10分並不困難。不過或許有許多考生認爲排列組合的問題不易得分而在考前就決定放棄，事實上本題並不是一個複雜的排列組合問題；從考生的答卷中我們可以知道本題是4個填充題中難度最高的一題，整份考卷來看也可推測出它是最不易得分的一題。另外我們也發現到有許多份的答案卷答對了後半部，而前半部答錯了！這顯示出後半部可以用一個比較簡捷的方式來處理，其方法如下：

1° $\square\square\square\boxed{0}$　個位數0的個數共987個，故在個位數共寫過987個0。

2° $\square\square\boxed{0}\square$（$98$；$0\sim9$）　十位數0的數共 $98\times10=980$，在十位數共寫過980個0。

3° $\square\boxed{0}\square\square$（$1\sim9$；$0\sim9$；$0\sim9$）　百位數0的數共 $9\times10\times10=900$，在百位數共寫過900個0。

故共計要寫 $987+980+900=2867$ 個零 #

⑤社會組第(b)題：

利用 $\log 3=0.4771$，$\log 7=0.8451$，解方程式 $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=7^x+7^{x+1}+7^{x+2}+7^{x+3}$；則 $7^x\div3^x=\boxed{寅}$；若取三位有效數字（第四位四捨五入），可得 $x=\boxed{卯}$。

(卯)的正確答案爲 -2.72，有些考生答成 -2.717，或 $-2.717\cdots$，在數學演算上可視爲正確的答案但顯見答者不淸楚有效數字的意義。至於答成 2.72 或 2.717 等正數的答案，顯然是取對數後，在對數運算上產生錯誤，例如 $\log\frac{1}{10}$ 或 $\log 0.1$ 應爲 -1，而演算成1，……。

由以上的說明可知填充題作答疏忽不得，一不小心可能會前功盡棄。因此，我們希望考生應該謹愼作答，其答案最後應作明智的判斷。這次的填充題大致上還命得相當稱職，惟應注意到填充題的閱卷方式是只看結果不看過程，其答案應盡可能是透過簡捷計算或利用基本概念的推演就可得到正確數據的線索，這次兩組的填充題都有一題涉及到太過於複雜計算才能得到正確結果的缺點。

貳、計算題或證明題方面

這次兩組的試題仍然保留近三年來占分40%的演算證明題。由於近三年來數學科閱卷採用分段給分，對現階段的數學教育頗有影響，

例如考生答題意願顯著提高，答題方式也年有進步！雖然如此，從今年的閱卷過程中仍然可以窺出當前數學教育方面的一些問題。我們就以考生容易產生錯誤的答題方式提出教學時應特別留意的地方。

(1)自然組的第二大題：

二(a)設 $x = u + \frac{1}{u}$，試將 $u^3 + \frac{1}{u^3}$ 表爲 x 的多項式。

(b)試利用(a)的結果，將方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 的三根表爲 $c = \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}$ 的有理式。

這道題的(b)部分基本上是卡丹解法的特例，(a)、(b)兩部分相互呼應，使其難度降低不少，例如，本來不知道卡丹解法的考生可能因(a)部分的出現，領悟出(b)的解法；本來(a)部分有小疏忽而致錯誤結果的考生因爲(b)部分的存在及時訂正過來。

(a)的正確解法：

解(一)：

$$u^3 + \frac{1}{u^3}$$

$$= (u + \frac{1}{u})(u^2 - u \cdot \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}) \cdots ①$$

$$= x[(u + \frac{1}{u})^2 - 2u \cdot \frac{1}{u} - 1] \cdots ②$$

$$= x(x^2 - 3)$$

$$= x^3 - 3x$$

在這個解法中，比較容易疏忽的地方爲：

第①步中立方和公式弄錯了！把

$-u \cdot \frac{1}{u}$ 寫成 $+u \cdot \frac{1}{u}$

第②步中把 $u^2 + \frac{1}{u^2}$ 寫成

$(u + \frac{1}{u})^2 + 2u \cdot \frac{1}{u}$

因此常見的錯誤答案是：$x^3 - x$，$x^3 + 3x$，$x^3 + x$，$x^3 - 2x$，$x^3 + 2x$ 等等。

解(二)：令 $x = u + \frac{1}{u}$

得 $x^3 = (u + \frac{1}{u})^3$

$$= u^3 + 3u^2 \cdot \frac{1}{u} + 3u \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} \cdots ①$$

$$= (u^3 + \frac{1}{u^3}) + 3(u + \frac{1}{u}) \cdots ②$$

$$= (u^3 + \frac{1}{u^3}) + 3x \quad \cdots\cdots ③$$

所以 $x^3 - 3x = u^3 + \frac{1}{u^3}$

在這個解法，比較容易疏忽的地方是：

第①步中的完全立方公式弄錯了！把

$3u^2 \cdot \frac{1}{u} + 3u \cdot \frac{1}{u^2}$ 寫成 $-3u^2 \cdot \frac{1}{u} + 3u \cdot \frac{1}{u^2}$ 或 $-3u^2 \cdot \frac{1}{u} - 3u \cdot \frac{1}{u^2}$

第②步中無法把 $3u^2 \cdot \frac{1}{u} + 3u \cdot \frac{1}{u^2}$ 化成

$3(u + \frac{1}{u})$

由第③步，移項忘記變號而得到

$u^3 + \frac{1}{u^3} = x^3 + 3x$ 的錯誤結果！

至於(b)部分有些考生可能時間不足不敢嘗試完成整個結果，不過大多數的考生做完(a)後，利用代換的方法把 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 代換成 $u^6 + u^3 + 1 = 0$ 的方程式，有的再繼續解下去而獲致較高的分數；有的就此停止！

部分考生未利用(a)的結果直接解出

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{9},\ 2\cos\frac{4\pi}{9},\ 2\cos\frac{8\pi}{9}$$

但是最後無法把這三個根表成 c 的有理式。

一般說來本題的困難大多出現在解出

$$u^3 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

後，無法正確地利用棣美佛定理求出 u 而致停擺或解錯了！

⑵自然組第三大題：

三設 P_1，P_2，P_3 爲拋物線Ψ上相異三點，過此三點各作Ψ的切線 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3，三線兩兩相交於 Q_1，Q_2，Q_3 三點，試證：$\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的面積比爲 $2:1$。

這道題主要的解題關鍵在於：

①正確有效的設定拋物線方程式，如 $y^2=4ax$，$y^2=ax$，$x^2=4ay$，$x^2=ay$

（部分考生設成 $y^2=4x$，$y^2=x$，$x^2=4y$，$x^2=y$ ……等特例，但做法上沒有大太的改變，這樣的設定法未再作進一步的解釋時，可能會被扣分；極少數的考生把拋物線方程式設定成一般式，如 $y=ax^2+bx+c$ 產生許多計算上的麻煩）。

②正確的設定Ψ上三點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 進而求出 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 的直線方程式。

（很多考生使用參數式表示 P_1，P_2，P_3 的坐標，而正確的表出 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 的方程式，部分考生設其中的一點爲頂點，而其他二點可能進一步設定成對稱點，使得計算過程簡化不少，但僅證出原來問題的特例而已，這是無法視爲正確的方法）。

③求出切線交點 Q_1，Q_2，Q_3 的坐標。

（能求出 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 的方程式者多能正確得出 Q_1，Q_2，Q_3 的坐標，少許的疏忽出現在計算上的錯誤或 x，y 坐標互調。）

④使用行列式表出三角形面積公式。

（大多的考生都能正確使用三階行列式表出已知三角形三頂點坐標的面積，部分的疏忽在於忘記應除以2；另一部分的疏忽忘記加上絕對值的符號；有的考生使用

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \text{ 或 } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

來表示三角形的有向面積，最後再加上絕對值。但部分考生或者用三階行列式表示 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面積，而用另一個符號 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的面積，混用符號並且未加說明其區別。）

⑤面積公式的化簡。

（由於本題爲證明題，因此許多完成了以上步驟的考卷，就不加思索地得到證明結果；但是本題中的行列式並沒那麼容易地看出其比爲 $2:1$，仍須將其計算過程簡單扼要的寫出來，以免被扣分。）

⑶自然組第四大題：

四設 a，b 爲二常數，且對任一實數 x 恒有

$$\frac{(a+1)x^2+(a-2)x+(a+1)}{x^2-x+1}>b$$

試求 a，b 的條件，並在坐標平面上圖示滿足前述條件的所有點 (a,b)。（特別要標出此區域之邊界、頂點。）

本題解法的主要步驟依次爲：

①利用 x^2-x+1 恒大於0的事實把原不等式化成二次不等式：$(a-b+1)x^2+(a+b-2)x+(a-b+1)>0$

（部分考生沒有寫出 x^2-x+1 恒大於0，可能會被扣一些分數；有些考生在寫 x^2-x+1 恒大於0的理由是 $b^2-4ac<0$，這樣子的寫法總不如寫成 $B^2-4AC=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$ 來得好，何況 b，a 易與原題中之 a，b 相混淆；其正確的理由應該是：

$\because$ x^2-x+1 的首項係數 $1>0$

且 $B^2-4AC=(-1)^2-4\cdot1\cdot1$

$=-3<0$

$\therefore$ x^2-x+1 恒正

還有部分考卷常會把 $B^2-4AC<0$ 的理由寫

$$B^2-4AC\leq 0$$

多了“等號”，這一點是容易出錯的地方，以下也會再發生同樣的錯誤，教師平時教學應特別提醒學生避免產生這樣的疏忽。

有些考卷知道利用 x^2-x+1 恒正的事實，但是在把原不等式化成二次不等式的過程，移項忘記變號而致使整理出錯誤的二次不等式，自然會影響以下的結果，損失頗大。）

②利用①中所得之二次不等式進一步的判斷得：

$$\begin{cases} a-b+1>0 \\ (a+b-2)^2-4(a-b+1)^2<0 \end{cases}$$

（部分的錯誤產生在未對首項係數“$a-b+1>0$”加以判斷，或者 $(a+b-2)^2-4(a-b+1)^2$ 判斷成 >0；或者把上式中的“>0”寫成“≥ 0”，教師在這方面的教學可能需特別強調這樣的疏忽；部分的判斷方法是分別以 $x=0$，1，-1 代①中的不等式，而得到上式的條件，這樣的作法顯然是錯誤，本題需要寫出過程，錯誤的方法得到正確的條件，當然還是錯誤）。

③由②中的不等式 $(a+b-2)^2-4(a-b+1)^2<0$ 化成

$(3a-b)(3b-a-4)<0$

即 $(3a-b)(a-3b+4)>0$

故得 a，b 之條件為：

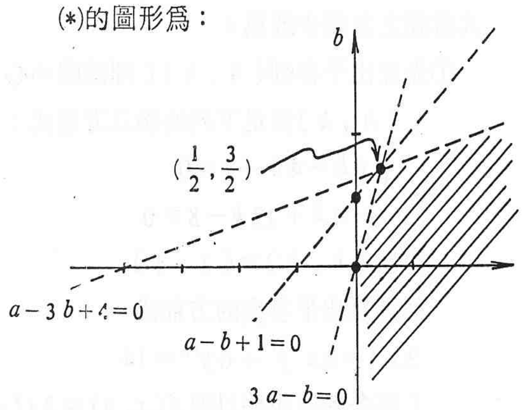
$$(*)\begin{cases} a-b+1>0 \\ 3a-b>0 \\ a-3b+4>0 \end{cases} \quad \text{或}$$

$$(**)\begin{cases} a-b+1>0 \\ 3a-b<0 \\ a-3b+4<0 \end{cases}$$

（部分答卷中只寫出(*)未寫出(**)，或者根本沒寫出(*)、(**)直接由 $(3a-b)(a-3b+4)>0$，$a-b+1>0$ 的條件去作圖，這樣子比較容易出錯；有一部分的考卷竟然再利用二次錐線的理論去判別 $(a+b-2)^2-4(a-b+1)^2=0$ 的圖形，顯然既費事又易錯。但是今年比往年有一個進步的現象，往年在解 $(a+b-2)^2-4(a-b+1)^2<0$ 的不等式，許多的考卷會先把它化成絕對值不等式：$|a+b-2|<2|a-b+1|$，然後再對絕對值內的正負去討論，這樣的解法既不經濟也易致錯誤！）

④根據③所得的聯立不等式(*)及(**)作圖得：

(*)的圖形為：



(**)無解

（最普遍的疏忽在於三條直線 $3a-b=0$，$a-b+1=0$，$a-3b+4=0$ 沒有交於一點 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，其次的疏忽沒有標明滿足(*)的區域，也有標錯了區域；部分的考生把直線 $a-3b+4=0$ 畫錯了，把它畫成通過 $(4,0)$ 與 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ 的直線，致使整個作圖區域產有不正確的結果，這些小疏忽對答卷者損失頗大，看到這樣的考卷常令閱卷委員扼腕嘆息！

至於(**)的聯立方程式，有些答卷還是依次去作各個不等式的圖形，部分考卷

得出解的區域，當然是錯了！有些比較聰明的考生標示各個不等式發現沒有共同區域後，或者把原來的作圖刪除或擦掉，寫明無解。）

⑷自然組第五大題：

五若橢圓方程式爲 $3x^2-4xy+6y^2-2x-8y-9=0$，試求該橢圓中心的坐標，半長軸與半短軸的長，以及長軸與短軸的直線方程式。

本題解題關鍵在於把橢圓方程式經平移或轉移化成標準型，可先平移亦可轉移，因此在分段給分的原則下，自然地平移與轉移各有獨立的部分分數，茲以先平移再轉移爲例，其解題之主要步驟爲：

①先求出平移到（h，k）（即橢圓中心），（h，k）滿足下列的聯立方程式：

$$(*)\begin{cases}6h-4k-2=0\\-4h+12k-8=0\end{cases}$$

得出（h，k）＝（1，1）

而計算出平移後的方程式

$3x'^2-4x'y'+6y'^2=14$

（許多答卷說明以對 $f(x,y)=3x^2-4xy+6y^2-2x-8y-9$ 分別對 x，y 偏微分的方式，令 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$ 得出(*)，對這樣的答卷者而言，我們可以判斷出他們並不甚清楚何以能以此方式解之，其眞義爲何？甚且偏微分的符號混淆使用，如 $f'(x)$，$f'(y)$，$\dfrac{f(x,y)}{\partial x}$，$\dfrac{2f(x,y)}{\partial y}$，….；以高一級的方法解低一級的問題，務求符號要正確，否則其給分方式可能會較苛刻；事實上，並不必要用偏微分的方法仍可迅速地得到(*)。部分答卷得出(*)而卻解錯，實在可惜，另外可能解出了正確的（h，k）＝（1，1）但橢圓中心卻答成（－1，－1），顯然對原坐標系而言是應該答成（1，1），而對新坐標系則爲（0，0），這一點在敎學時對中低程度的學生應特別提醒他們分辨淸楚。）

②再作旋轉來化簡方程式 $3x'^2-4x'y'+6y'^2=14$ 其方法有二：

方法㈠：

先求出旋轉角 θ

$$\cot 2\theta=\frac{3-6}{-4}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{1}{2}$$

（可以提供求長、短軸的直線方程式）

$$\begin{cases}a'+c'=a+c=9\\a'-c'=\pi\sqrt{(a-c)^2+b^2}=-5\end{cases}$$

得 $a'=2$，$c'=7$

旋轉後的方程式爲 $2x''^2+7y''^2=14$，

即 $\dfrac{x''^2}{7}+\dfrac{y''^2}{2}=1$

方法㈡：

利用固有值來標準化

令 $A=\begin{bmatrix}3&-2\\-2&6\end{bmatrix}$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\-2&6-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-9\lambda+14$$

令 $\lambda^2-9\lambda+14=0$

即得 $\lambda=7$ 或 $\lambda=2$………固有值

$A-2I=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}$，對應於固有值 2 的固有向量 $v_1=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$A-7I=\begin{bmatrix}-4&-2\\-2&-1\end{bmatrix}$，對應於固有值 7 的固有向量 $v_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

（絕大部分的答卷使用第一種方法，少部分使用第二種，由 v_1，v_2 及橢圓中心

（1，1），很容易求得長、短軸的直線方程式。）

③根據②所化簡得到的方程式，求出其半長軸爲$\sqrt{7}$，半短軸爲$\sqrt{2}$。

（部分答卷把半長軸寫成$2\sqrt{7}$或$\frac{\sqrt{7}}{2}$；半短軸爲$2\sqrt{2}$或$\frac{\sqrt{2}}{2}$，顯然沒弄懂長、短軸的意義；甚至有一些答卷把半長軸寫成$\sqrt{2}$，而半短軸寫$\sqrt{7}$，連$\sqrt{7}$，$\sqrt{2}$的大小關係都疏忽，實在荒謬！）

④根據②中的資料求出長軸的直線方程式爲$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$，或$x-2y+1=0$；短軸的直線方程式爲$y-1=-2(x-1)$或$2x+y-3=0$

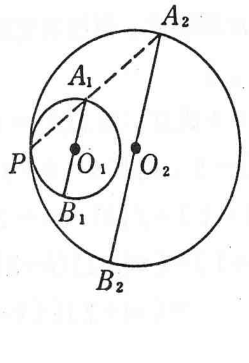
（部分答卷把長短軸方程式互調了！或者沒指明那一條是長軸方程式，那一條是短軸方程式，都可能會被扣一點分數。）

附註：本題放在最後，依命題小組的看法可能是演算證明中最難的題目，但依高中數學教師的看法或實際閱卷的情形，本題難度並不高。

(5)社會組第二大題：

二兩圓O_1與O_2內切於P點，兩線段A_1B_1與A_2B_2分別爲它們的直徑。若兩個有向線段$\overrightarrow{A_1B_1}$與$\overrightarrow{A_2B_2}$平行且同向，試證明：P，A_1，A_2三點共線。

這道證明題的最主要關鍵應爲：



①依題意作出如題意的兩圓及兩直徑A_1B_1，A_2B_2標示法，如上圖。

（絕大多數的困難無法使用圓規及直尺將問題中的兩圓作出正確的圖形，顯示社會組的考生已把國中時代所學的直尺圓規使用法或基本的平面幾何知識忘得一乾二淨了！本題若將題意用圖示方式顯示出來，則其難度必可大幅降低了！）

②利用到平面幾何的基本知識：P，O_1，O_2三點共線。

（大部分的答卷所以失敗就是忘記了這個事實！）

(6)社會組第三大題：

三一圓和兩直線$x+3y-5=0$及$x+3y-3=0$相切，且圓心在直線$2x+y+1=0$上，試求此圓的方程式。

本道題的解法關鍵爲：

①求圓心坐標，方法有二

方法(一)：

圓心坐標爲下列聯立方程式的解：

$$\begin{cases} x+3y-4=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases}$$

得$(x,y)=(-\frac{7}{5},\frac{9}{5})$

方法(二)：

求$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+3y-5=0 \end{cases}$

及$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+3y-3=0 \end{cases}$

之解，並求此兩組解的中點坐標即爲圓心。

（大部分答案的錯誤主要在於計算的疏忽；有些用方法(二)但未能解出而僅用作圖顯示，看不出其中點坐標，當然得不到圓心坐標。）

②求半徑$\left(=\frac{1}{2}\frac{|5-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}\right.$或$=$

$$\frac{\left|-\frac{7}{5}+\frac{27}{5}-5\right|}{\sqrt{1^2+3^2}}\Bigg)=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

（大部分答案的錯誤也是計算上的疏忽，也有忘記加上絕對值而得半徑$=\frac{-1}{\sqrt{10}}$的"負值"，這樣當然會被扣分）

③最後寫出圓的方程式：

$$(x+\frac{7}{5})^2+(y-\frac{9}{5})^2=\frac{1}{10}$$

（一部分錯誤答案寫成

$$(x-\frac{7}{5})^2+(y+\frac{9}{5})^2=\frac{1}{10}$$

或疏忽寫成

$$(x+\frac{7}{5})^2+(y+\frac{9}{5})^2=\frac{1}{10}）$$

(7)社會組的第四大題

四試解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4(x+y)+3=0 \cdots ① \\ xy+2(x+y)-5=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

本道題大致有二種解法（絕大多數正確作答的考生採用第一種方法）：

方法(一)：

①－②得$(x+y)^2-6(x+y)+8=0$

即$[(x+y)-4][(x+y)-2]=0$

得 $x+y=4$ 或 $x+y=2$

代入①或②得

$$(*)\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \text{或}(**)\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-3 \end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2\pm\sqrt{7} \\ y=2\mp\sqrt{7} \end{cases}$$

方法(二)：

由①、②消去y化簡得：

$x^4-6x^3+6x^2+2x-3=0$

（當然也可消去x，得y的四次方程式）

分解因式，得

$(x-1)^2(x^2-4x-3)=0$

$x=1$，$x=2\pm\sqrt{7}$

再代回①或②得

$$y=1，y=2\mp\sqrt{7}$$

（用方法(一)的答卷方式許多作到(*)或(**)就停了！部分考生用猜答方式得出$x=1$，$y=1$的一組解；也有不少的答案寫成$x=2\pm\sqrt{7}$，$y=2\pm\sqrt{7}$，看不出它們是指$\begin{cases} x=2+\sqrt{7} \\ y=2-\sqrt{7} \end{cases}$，$\begin{cases} x=2-\sqrt{7} \\ y=2+\sqrt{7} \end{cases}$；有的僅寫出$x$值$2\pm\sqrt{7}$沒有寫出$y$值，則可能會被扣幾分；有些僅寫出$x=2+\sqrt{7}$，$y=2-\sqrt{7}$或$x=2-\sqrt{7}$，$y=2+\sqrt{7}$其中的一組解，也是不完整，當然也應該扣分。）

(8)社會組第五大題：

五平面上有m條相異直線L_1，L_2，…，L_m共交於一點M，又有n條相異直線K_1,K_2，…，K_n共交於另一點N，假設任一L_i皆不通過N，任一K_j皆不通過M，而且任一對L_i，K_j皆不平行。試利用數學歸納法證明這$m+n$條直線共將平面分割成$(m+2)(n+2)-5$個區域。

用數學歸納法證明此題的最基本關鍵是假定其中的m或n爲定數，例如：

設$f(n)$表示此$m+n$條直線所分割的區域數。

①當$n=1$時

$$f(n)=2m+(m+1)=3m+1$$
$$=(m+2)(1+2)-5$$

（作答的情形常會遇到直接寫$f(n)=(m+2)(1+2)-5$，而未作任何說明；有時指出了m條共點直線將平面分成$2m$個區域，但沒有完成歸納法的第一步。）

②設$n=k$成立，即$f(k)=(m+2)(k+2)-5$，則當$n=k+1$時，利用$f(k+1)-f(k)=m+2$的事實得

$$f(k+1)=(m+2)(k+2)-5+(m+2)$$
$$=(m+2)[(k+1)+2]-5$$

（絕大多數作答的考生，都未能明顯的指出 $f(k+1)-f(k)=m+2$ ，而直接寫出 $f(k+1)=(m+2)[(k+1)+2]-5$ ，亦即沒有完成歸納法的第二步。）

附註：高中數學教師普遍認爲本題難度過高，不論是老師或是考生幾乎在高中三年的教學生涯都沒碰過這種題目的經驗，致使他們對這樣的考題之評量目的感到相當疑惑不解！

叁、結　論

對以上閱卷發現的實例，筆者給高中數學教師或準考生一些建議：

1. 教師不僅僅要教好學生學習數學，也應適時輔導學生一些基本答題的技術。
2. 平時養成細心作題的習慣，避免一些不必要的疏忽，否則對塡充題的答題常會小疏忽造成大損失。
3. 準考生不僅要在考前準備好考試範圍的內容，而且應在考前充分瞭解答題方法的基本規定，例如，不可使用鉛筆作答非選擇題；但在試題紙演算塡充題、選擇題或作圖時盡可能使用鉛筆，隨身携帶作圖工具圓規、直尺等。
4. 八十分鐘的考試時間，試題必然有限，難以控制到各册題目均勻分佈，今年沒出現考題的單元，或許明、後年會出現，絕不可投機冒險。
5. 今年的社會組考題部分偏難，成績顯著偏低是事實，相信命題委員會將愼重檢討考題的缺失，促使來年考題的合理，以提高聯考取才的功能。身爲數學教師，一方面應愼重檢討教學方法，另一方面應設法挽救社會組考生的信心。

（本文作者任教於師大數學研究所）