爲計算與證明題請命

羅添壽

一年一度的七月大考又來臨了，對每一應試莘莘學子來說是一種考驗，考驗他們三年來的辛勤準備，能否通過這一試而身登大學殿堂，接受更深一層的高等教育（個人的榮耀）。然對國家而言是件大事，國家欲從十萬青年中，由聯考這一關精挑細選一些國家的中堅份子與人才，尤其基礎科學方面的人選，將是國家的科學人才，不可不愼也。

記得六月三十日那天（聯合報報導），中研院院長吳大猷博士痛切指陳當前大學基礎科學敎育素質低落；他說「近年來台灣赴美留學生，有的程度比不上大陸留學生，問題嚴重令人憂慮，……，且台灣留美學生已不若廿年前吃香。」又敎育部科學敎育指導委員會諮詢委員會議中，吳博士亦論及在每年聯考擠進窄門的三萬餘大學生都未能敎好，無法讓他們達到應有水準。爲何會有如此現象呢？今筆者僅就基礎科學——數學這科提出硏討。

近廿年來由於聯考選擇題的出現，使高中數學敎育無法正常化，學生只求聯考成績得高分（金榜題名重要），老師只求表現（聯考學生的分數就是敎師的敎學成果），故課堂上老師絕招頻出，只要求學生會算，會選答案，定理證明大可不必去領會，而將解題法則或公式定理牢記，代入試題將它解出卽可，理由不必多問（其實目前的學生樂此不疲），加上學生拚命磨練一些怪招，來應付考試，幾乎無往不利，試問如此的學習法，將來對科學敎育的學習得到些什麼呢？（當然放棄數學者早將他們應付考試的招術轉移至其他科目了）。故今筆者以今（74）年自然組聯考一些試題爲例（自然組與社會組命題形式相同），提出說明唯有計算與證明，才能促進數學敎育正常化的理由。

今年自然組試題命題很靈活，然美中不足的是若將選擇題與塡充題，全改爲計算與證明題，讓學生們發揮其才華，那就更能測出學生們眞正的程度了。請參看以下的說明：

I. 自然組選擇題（甲）計分方式不合理：

題目： 設 π 爲通過（0，0，0），（−1，0，2）及（1，−1，0）三點的平面，S 爲以（4，3，4）爲球心而與 π 相切的球；若切點坐標爲（x，y，z），則

1. $x=$ (A) −2 (B) −1 (C) 0 (D) 1 (E) 2 （單選，4分答錯倒扣1分）。

2. $y=$ (A) −2 (B) −1 (C) 0 (D) 1 (E) 2 （單選，4分答錯倒扣1分）。

3. $z=$ (A) −2 (B) −1 (C) 0 (D) 1 (E) 2 （單選，4分答錯倒

扣1分）。

此題切點坐標解出爲（0，−1，2），若考生的答案爲（0，−1，−2）可得7分，若考生的答案爲（0，1，−2）可得2分，倘此題考生會做而計算錯誤，當然無可厚非，倘學生瞎猜而得如此高分，那豈不太公平合理嗎？（據筆者十幾年的教學經驗，且從考生的口述中，此種情況每年發生的不少），若此題改爲計算題就無如此現象了。

2.自然組選擇題（乙）可用觀察法與反代法解出，不易測出學生眞正的程度。

題目：設一聯立方程式 $\begin{cases} z\omega=-2+11i \\ z^2+\omega^2=4+28i \end{cases}$

4.上述聯立方程式有幾組解？

(A) 1組　(B) 2組　(C) 3組　(D) 4組　(E) 8組　（單選4分，答錯倒扣1分）。

5.在上述聯立方程式的各組解中，下列那些數是z的值？

(A) $-1-2i$　(B) $1-2i$　(C) $3+4i$　(D) $3-4i$　(E) $4+3i$　（多重選擇4分，答錯倒扣1分）。

聯立方程組其解之個數由方程式中兩方程式之最高次數相乘卽爲其解之個數，故

$$\begin{cases} z\omega=-2+11i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ z^2+\omega^2=4+28i \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

共4組解（因①爲2次數　②爲2次數，得 $2\times2=4$）故第4小題不必計算卽可得4分。又第5小題可將選擇項一一代入檢查，

例　(A)項 $z=-1-2i$ 代入　$z\omega=-2+11i$ 中得　$\omega=-4-3i$

將　$z=-1-2i$，$\omega=-4-3i$ 代入 $z^2+\omega^2$ 中得 $(-1-2i)^2+(-4-3i)^2=4+28i$　故 (A)對，如此一一檢查亦可得分。

故原試題若改爲求解 $\begin{cases} z\omega=-2+11i \\ z^2+\omega^2=4+28i \end{cases}$ 豈不是一好題目嗎？

3.填充題若改爲計算題，不但可防止學生作弊（有些學生的作弊方式很高招），且可得到合理的分數，今以其中一試題爲例：

題目：設曲綫S之參數方程式爲

$$\begin{cases} x=\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta+\sin\theta; \end{cases} \quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

則S上的點與原點的距離，最小值爲$\boxed{}$最大值爲$\boxed{}$

解：令$P(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta+\sin\theta)$表$S$上之任一點，O表原點

則

$$\begin{aligned}\overline{OP}&=\sqrt{\cos^6\theta+(\sin^3\theta+\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{(1-\sin^2\theta)^3+\sin^6\theta+2\sin^4\theta+\sin^2\theta}\\&=\sqrt{5\sin^4\theta-2\sin^2\theta+1}\\&=\sqrt{5(\sin^2\theta-\frac{1}{5})^2+\frac{4}{5}}\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant\sin^2\theta\leqslant1$

當　$\sin^2\theta=\frac{1}{5}$時　OP之最小值爲 $\frac{2}{\sqrt5}$

當　$\sin^2\theta=1$時　OP之最大值爲 $\sqrt4=2$

註：此種試題學生們卽使會算，然由於緊張過度往往計算錯誤，例①誤算 $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1$

②配方錯誤③$\overline{OP}$誤算$\frac{4}{5}$爲最小值，4爲最大值卽忘記開方。

倘有以上之錯誤而與全不會算的學生得同樣的零分，未免太不公平了（因程度確實不同）。

總之，筆者希望聯招會一定要突破萬難，將試題盡快全以計算與證明題的形式出現，且建議命題教授命題時試題務必力求普遍合理，如此才能提高學生學習數學的興趣與信心，進而培養眞正的科學人才，讓我們共同期待著吧!

—本文作者任教於新化高中—