談今年聯考社會組數學考題

羅添壽

今年聯考社會組數學科考試終在7月3日落幕了，隔天各大報紙紛紛以『出題太偏且過於難深』，『難得有點離譜了』，如此的試題不但測不出考生程度的高低，還可能導致考生日後對數學採取完全放棄的態度……。只有指責沒有讚美之語，難道眞正很艱深，很離譜嗎？其實不然，該說有些試題深而不難，但較不適合考社會組的考生。（目前我們的學生並沒有好好的研習數學之故）。

今筆者將其得失與一些試題分析如下：

(1)優點：

①大部份試題皆很普遍合理且富有思考性。例如塡充題(a)(b)(c)(d)及計算題(三)(四)題，只要平時解題時多加以分析思考，相信一般程度的學生這些試題皆可得分。（正常情況下，此次聯考該可得五、六十分）。

②選擇題減少，這是今年聯考最大的特色。由於選擇題大幅度的減少，故今年聯考較往年易測出學生的程度，且可防止考生作弊。（選擇題只能看到考生分數的多少，却不能代表學生的程度，這是近十幾年來數學教育無法正常化之理由）。

③沒有「送分題」是今年命題的一大革新，對投機取巧的考生是一大打擊。往後倘能繼續如此命題必能促進學生眞正去學習數學的慾望。

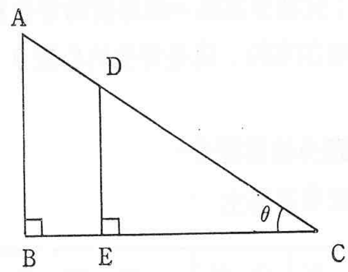
(2)缺失：

①選擇題(甲)(乙)兩題計分方式欠合理，放棄數學的考生可靠運氣得分。

（選擇(甲)之①②與選擇(乙)之③④該分別合計否則猜中機會很大。（反正不猜必得零分）例，只要不猜A而全猜B或C或D或E則至少可得1分）

②選擇題(甲)題目敍述過長，對社會組的學生，易因浪費過多的時間去了解試題而造成緊張過度，影響後面的解題情緒而一敗塗地。（學生心目中總認爲第一題是較容易的試題）倘能將原題改爲：

如圖



今$\overline{AB} \perp \overline{BC}$，$\overline{DE} \perp \overline{BC}$，$\overline{AC} = 5$

$\overline{DE} = 3$，$\angle ACB = \theta$

若$\overline{BE} = a\cot\theta + b\cos\theta$求$a$，$b$

其中a、b爲常數

或許較適合考社會組的學生。

（此部份是一般程度的考生對筆者的反應，而加寫的。）

③試題分佈不均匀，高三第五、六册均未出題，影響學生學習五、六册的情緒，至少簡易排列組合該出一題，否則高三教師於課堂上只好唱獨角戲了。

④選擇(乙)題目，學生容易半做半猜，有失公平，倘能將試題改爲如下：

$\triangle ABC$ 之面積爲 R，周長爲 $2S$，而三邊邊長成等差數列。假設周長同爲 $2S$ 的正三角形，面積爲 $\frac{5}{3}R$。若 a 與 c 分別表示 $\triangle ABC$ 的最小邊與最大邊，且此種三角形有無限個中，若 a 爲整數，c 爲介於10與15之間的整數，求 a 與 c。倘能如此修改，或許考生較有思考的路線，至於其演算過程，請見試題研討4。

⑤計算題(五)爲雙變數數學歸納法，不宜在大學聯考試題中出現，尤其是社會組的考生不是交白卷便是硬湊交卷。（此種試題學校幾乎沒教過，學生完全沒有概念，何談考試，難怪報紙要指責了，尤其高中教師不知如何向學生交代？）

⑥填充題(d) $z=\sqrt{3}i-1$ 而 $1+z+z^2+\cdots+z^{101}=u+iv$，$u$，$v\in R$，求 u，v。此題 u，v，數值很大，影響考生解答，可能會半途而廢。

（此部分亦爲一般程度的考生要求筆者加寫的，這是考生的心聲）

(3)試題分佈與配分：

以東華本爲主

册　別	分　數	內　容　分　佈
第一册	10分	實數系（10分）（計算第五題）
第二册	30分	①指數與對數（10分）填充題(b) ②無理方程式（10分）填充題(c) ③二次聯立方程組（10分）計算題第四題
第三册	30分	三角函數（30分）（選擇題(甲)(乙)填充題(a)）
第四册	20分	①圓與球（10分）計算題第三題 ②複數系（10分）填充題(d)
第五册	0 分	
第六册	0 分	
第三册或第四册	10分	平面幾何或向量（計算題第二題）

以單元計

單　　元	分　數
①解析幾何	20分
②代　　數	40分
③排列組合與機率	0 分
④平面幾何或解析幾何	10分
⑤三　　角	30分

(4)一些試題研討：

今筆者僅將選擇題(乙)，計算(二)，證明(五)此三題，思考不易提出研討。

1.選擇題(乙)

題目： $\triangle ABC$ 之面積爲 R，周長爲 $2S$，而三邊邊長成等差數列。假設周長同爲 $2S$ 的正三角形，面積等於 $\frac{5}{3}R$。若 a 與 c 分別表示 $\triangle ABC$ 的最小邊與最大邊，且 $a\in\{5,6,7,8,9\}$，$c\in\{10,12,13,14,15\}$，求 a，c

解： 依題意知 $a+b+c=2S$ 且 $2b=a+c$

故 $3b=2S$ $\therefore b=\frac{2S}{3}$ (正三角形的每邊長,

又 $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

將 $S=\frac{3}{2}b$ 代入上式得

$\sqrt{(S-a)(S-c)}=\frac{3}{10}b$

平方得 $(S-a)(S-c)$

$=(\frac{3}{10}b)^2=\frac{9}{100}b^2$

$\therefore(\frac{3}{2}b-a)(\frac{3}{2}b-c)=\frac{9}{100}b^2$

$\therefore\frac{9}{4}b^2-(a+c)\cdot\frac{3}{2}b+ac$

$=\frac{9}{100}b^2$

$\therefore\frac{9}{4}b^2-3b^2+ac=\frac{9}{100}b^2$

化簡得 $21b^2=25ac$

令 $a=b-d$，$c=b+d$ 代入得

$21b^2=25b^2-25d^2$

$\therefore 4b^2=25d^2$ $\therefore b=\frac{5}{2}d$，

$c=\frac{7}{2}d$，$a=\frac{3}{2}d$

$\therefore a=\frac{3}{7}c$

但已知 $c\in\{10,12,13,14,15\}$

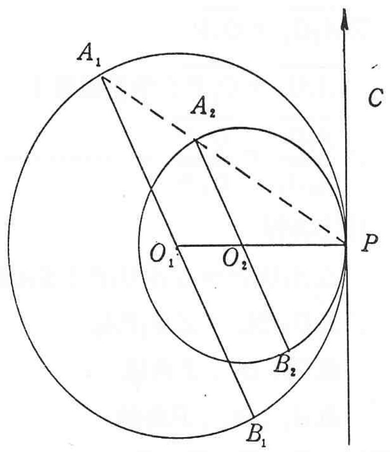
故得 $c=14$，$a=6$

註：對社會組的考生，倘能多一些提示，此題更能評量學生的程度，例加一些『能滿足此關係的△ABC有無很多解中，若 a 爲整數，且 c 介於10到15之間的整數』

2.計算與證明題(二)

題目：兩圓 O_1 與 O_2 內切於 P 點，兩線段 A_1B_1 與 A_2B_2 分別爲它們的直徑。若兩個有向線段 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 與 $\overrightarrow{A_2B_2}$ 平行且同向，試證明 P，A_1，A_2 三點共線。

<證一>如圖所示：



作直線 O_1O_2，則直線過 P，

過 P 作外公切線 PC

作 $\overline{A_1P}$，$\overline{A_2P}$，

則 $\angle A_1PC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1P}=\frac{1}{2}\angle A_1O_1P$ ……①

$\angle A_2PC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_2P}=\frac{1}{2}\angle A_2O_2P$ ……②

但 $\overline{A_1B_1}\,/\!/\,\overline{A_2B_2}$

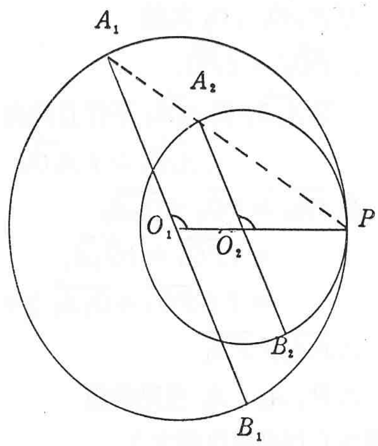
$\therefore\angle A_1O_1P=\angle A_2O_2P$

由①②

得 $\angle A_1PC=\angle A_2PC$

故 P，A_1，A_2 共線

<證二>如圖：



作直線O_1O_2則直線過P

$\because$直徑$\overline{A_1B_1}$，$\overline{A_2B_2}$平行

故$\angle A_1O_1P=\angle A_2O_2P$ …………①

又$\overline{A_2O_2}=\overline{O_2P}$

$\overline{A_1O_1}=\overline{O_1P}$（半徑相等）

$\therefore \dfrac{\overline{A_1O_1}}{\overline{A_2O_2}}=\dfrac{\overline{O_1P}}{\overline{O_2P}}$ ……………………②

由①②得

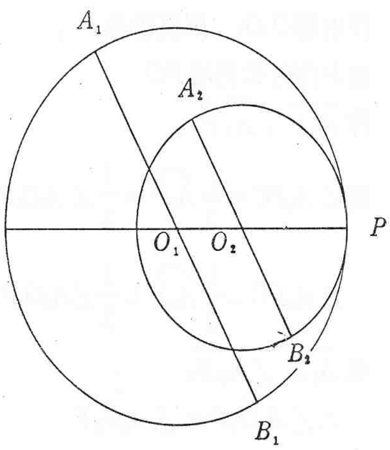
$\triangle A_1O_1P\sim\triangle A_2O_2P$（SAS相似）

$\therefore \angle O_1PA_1=\angle O_2PA_2$

但O_1, O_2，P共線

故A_1，A_2，P共線

<證三>設二圓，圓心為O_1, O_2，



取半徑比值$\dfrac{\overline{PO_2}}{\overline{PO_1}}=\dfrac{\overline{A_2O_2}}{\overline{A_1O_1}}=t$

$(0<t\neq 1)$

$\because P$，O_1，O_2共線

$\therefore \overrightarrow{PO_2}=t\overrightarrow{PO_1}$

又$\overrightarrow{A_1B_1}$與$\overrightarrow{A_2B_2}$平行且同向

$\therefore \overrightarrow{A_2O_2}=t\,\overrightarrow{A_1O_1}$

故$\overrightarrow{PA_2}=\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{O_2A_2}$

$=t\overrightarrow{PO_1}+t\overrightarrow{O_1A_1}$

$=t\,(\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1A_1})=t\overrightarrow{PA_1}$

$\therefore \overrightarrow{PA_2}\mathbin{/\!/}\overrightarrow{PA_1}$

$\therefore P$，A_1，A_2三點共線

<證四>（以坐標化解之）

設二圓圓心為O_1, O_2，且$\overrightarrow{OP}$為x軸正向

取$O_1(0,0)$，$O_2(b,0)$，$P(a,0)$

則二圓方程式分別為

$x^2+y^2=a^2$與

$(x-b)^2+y^2=(a-b)^2$

其中$a>b>0$

設$A_1(a\cos\theta，a\sin\theta)$

由中點公式得

$B_1(-a\cos\theta，-a\sin\theta)$

同理$A_2(b+(a-b)\cos\theta,(a-b)\sin\theta)$

$B_2(b-(a-b)\cos\theta,-(a-b)\sin\theta)$

$\therefore \overrightarrow{PA_1}=(a\cos\theta-a，a\sin\theta)$

$=a(\cos\theta-1，\sin\theta)$ ……①

$\overrightarrow{PA_2}=((b-a)-(b-a)\cos\theta$，

$(a-b)\sin\theta)$

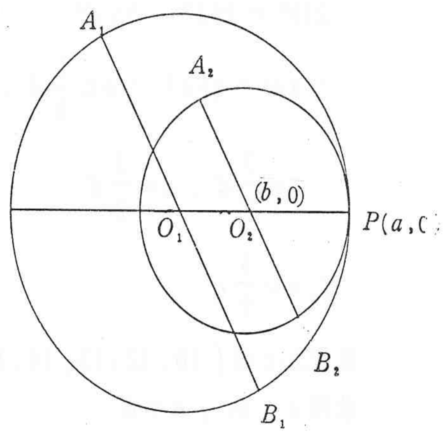
$=((a-b)(\cos\theta-1)$，

$(a-b)\sin\theta)$

$=(a-b)(\cos\theta-1,\sin\theta)$ …②

由①②知$\overrightarrow{PA_1}\mathbin{/\!/}\overrightarrow{PA_2}$

$\therefore A_1$，A_2，P共線



註：①筆者以四種證法解之，供讀者參考，亦希望命題教授注意此題有多種證法，當然其命題優點能讓考生自由思考，發揮其才華。

②此題較適合考自然組，又其證法非唯一，故不宜放在計算與證明之第一題，以免造成情緒不穩定。

3.計算與證明題(五)

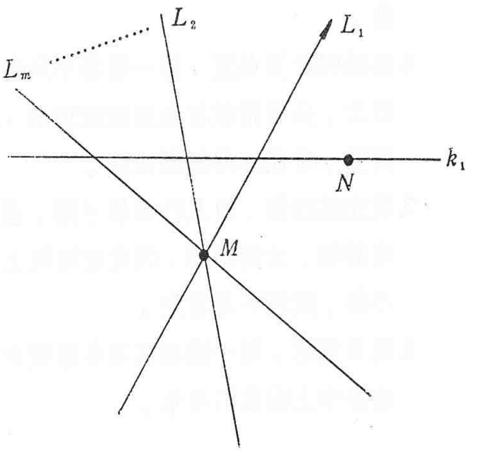
題目：平面上有m條相異直線L_1，$L_2 \cdots L_m$共交於一點M，又有n條相異直線K_1，$K_2 \cdots K_n$共交於另一點N，假設任一L_i皆不通過N，任一k_j皆不通過M，而且任一對L_i，K_j皆不平行。試利用數學歸納法證明這$m+n$條直線共將平面分割成$(m+2)(n+2)-5$個區域。

＜證明＞設$f(m,n)=(m+2)(n+2)-5$

令m爲定自然數，其分割爲$2m$個區域

(1)當$n=1$時，其所分割區域數爲

$2m+(m+1)=3m+1$（如圖所示）



即$f(m,1)=(m+2)(1+2)-5$

$=3m+1$

$\therefore n=1$時成立

(2)設$n=k$時

$f=(m,k)=(m+2)(k+2)-5$成立

令過N之直線再增一條時，其交於N之區域增加了二個區域，交於點M之直線區域增加$(m+1)$個，但其中有一共同區域故共增$2+(m+1)-1$

$=(m+2)$個區域

$\therefore$共有$(m+2)(k+2)-5+(m+2)$

$=(m+2)[(k+1)+2]-5$

$=f(m,k+1)$

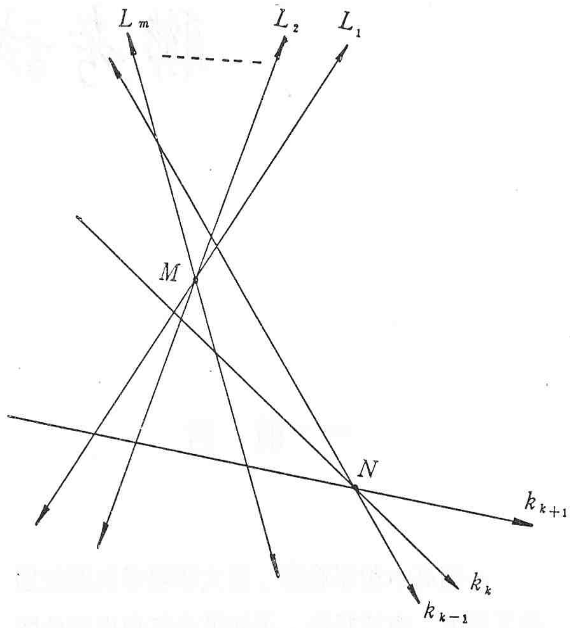
故$n=k+1$時亦成立

由數學歸納法知：$\forall n \in N, f(m,n)$

$=(m+2)(n+2)-5$恆成立

同理固定$n \in N$，$\forall m \in N$亦成立。

故對$\forall m$，$n \in N$均成立。



註：此題之證明過程不易表達得很完美，又需浪費時間分析思考，故較適合於『數學競試』。

(5)結語與建議：

①爲使數學教育正常化，筆者建議命題教授多考一些普遍合理的試題，試題不一定要很靈活。

②儘量給考生有分數可拿（鼓勵作用），以激發考生們學習數學的興趣與信心，否則高中教師在課堂教數學，而學生所學習的可能是歷史，地理了。

③斟增闈場內的試考生，一旦發現試考成績偏低，命題小組不應太主觀，該及時補救，促使試題能趨合理。

一本文作者任教於新化高中一