七十四年度大學入學考
自然組試題予教學之感應

賴敦生

壹、前 言

輔導學生應考大學入學考試而從事解題數學是高中數學教育的一部分，本質上我們從事數學教學工作者應本諸部頒課程標準，宏揚教材精神，讓高中生一旦通過大學入學考試進入大學後能立即銜接大學課程，繼續努力研究，締造更高層次的學習成果，貢獻科學研究。除此而外培養學生學習的興趣，尋求並享受還有利用及創造數學的美感，那是最高層次的指標，也是我們的工作使命。

筆者於報紙發佈的大學考題中深悉試題的內容，即扮演考生的角色，實際參加解題，以所領略的過程經驗結合教學的體認，並書出個人對這方面之感應，用以響應數學傳播雜誌的「聯考專欄」，願供高深學人作為歸納統計的參考，或虛心等候讀者指正，幫助日後教學工作而一舉數得，是筆者由衷敬業深摯的願望。

貳、試題、解答、感應

第一部分：選擇題（共佔20分）（自然組）

說明：請依順序在「選擇題答案卡」上作答。第1題至第4題為單選題，第5題為多重選擇題。答錯均倒扣分數，請看各題說明。

【甲】設 π 為通過（0，0，0），（−1，0，2）及（1，−1，0）三點的平面，S 為以（4，3，4）為球心而與 π 相切的球；若切點坐標為（x，y，z），則

1. $x=$

(A) −2 (B) −1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

（單選，4分；答錯倒扣1分）

2. $y=$

(A) −2 (B) −1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

（單選，4分；答錯倒扣1分）

3. $z=$

(A) −2 (B) −1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

（單選，4分；答錯倒扣1分）

【乙】設一聯立方程式 $\begin{cases} zw=-2+11i \\ z^2+w^2=4+28i \end{cases}$

4. 上述聯立方程式有幾組解？

(A) 1組 (B) 2組 (C) 3組 (D) 4組

(E) 8組

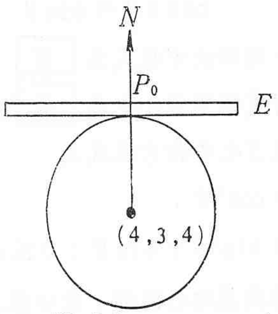
（單選，4分；答錯倒扣1分）

5. 在上述聯立方程式的各組解中，下列那些數是 z 的值？

(A) $-1-2i$　(B) $1-2i$　(C) $3+4i$

(D) $3-4i$　(E) $4+3i$

甲、



1.* 過平面上三點 $A(-1,0,2)$，$B(1,-1,0)$，$O(0,0,0)$ 之平面方程式

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

化簡：$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$2x+2y+z=0$

2.* 據此得平面的法向量 $\overrightarrow{N}(2,2,1)$ 這與切點 $P(x,y,z)$，球心 $P_0(4,3,4)$ 所定的向量 $\overrightarrow{P_0P}=(x-4,y-3,z-4)$ 平行，∴可設取

$\overrightarrow{P_0P}=(x-4,y-3,z-4)$

$\quad =t(2,2,1)\quad t\in R$

因得　$x-4=2t$，$y-3=2t$

$\quad z-4=t$

即切點可表為

$(x,y,z)=(4+2t,3+2t,4+t)$

3.* 切點在平面 $2x+2y+z=0$ 上，故：

$2(4+2t)+2(3+2t)+(4+t)=0$

解得 $t=-2$

4.* 切點坐標 $(4+2\cdot(-2),3+2\cdot(-2),4+(-2))=(0,-1,2)$

ans：1. C，　2. B，　3. E

【受測理論之結構】

1° 已知三點坐標，求一平面方程式。

2° 法向量與球心至切點的向量平行。

3° 向量之係數積演算。

4° 參數表示切點坐標。

5° 方程式，解之幾何意義。

6° 由參數求得切點坐標。

【本題之感悟】

題意清楚，可瞬間了解隨之決定解題對策，於深入思考中想像求解過程輪廓清晰可見，此時稍可定下心來慢慢的體驗解題的趣味。首先是由行列式演算（或用別種方法，不多介紹，就以此法代表。）求平面方程式，這個不難，教本中常見，但是要結合平行向量的理論找到以參數代表切點坐標，然後以方程式解的幾何意義等等基本知識連貫起來，集中火力同時作答，平常非得自己有實際演算、思考的經驗，不能在此時應付裕如，尋找到眞確的答案！

乙、將 $\begin{cases} z\omega=-2+11i \\ z^2+\omega^2=4+28i \end{cases}$ 以對稱式

$\begin{cases} (z+\omega)^2-2z\omega=4+28i \\ (z-\omega)^2+2z\omega=4+28i \end{cases}$ 表之

$$\therefore \begin{cases} (z+\omega)^2=2z\omega+4+28i \\ \qquad =-4+22i+4+28i \\ \qquad =50i \\ \qquad =50\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) \\ (z-\omega)^2=-2z\omega+4+28i \\ \qquad =4-22i+4+28i \\ \qquad =8+6i \\ \qquad =10(\cos\theta+i\sin\theta) \\ \text{其中} \cos\theta=\dfrac{4}{5},\ \sin\theta=\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

複數開平方

$$\begin{cases} z+\omega=\pm 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \qquad =\pm 5(1+i) \\ z-\omega=\pm\sqrt{10}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \qquad =\pm\sqrt{10}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{1}{\sqrt{10}}i\right) \end{cases}$$

$$* \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\therefore z+\omega=5+5i$，$+5+5i$，$-5-5i$，$-5-5i$

$z-\omega=3+i$，$-3-i$，$3+i$，$-3-i$

計4組

ans：4.選(D)

5. $z=4+3i$，$-1-2i$，$4+2i$，$-1-3i$，選(A)(E) #

【受測理論之結構】

1.* 基本對稱式之演算。

2.* 複數之開平方。

3.* 正餘弦半角律之運用。

4.* 建立聯立方程組求解。

5.* 解聯立方程組。

【本題之感悟】

解聯立方程組的理論結構是最單純的，作答機械化，能知道爲何種目標演算，看起來甚是容易，可是將方程組習慣的改敍成基本對稱式探索時，豁然發現是複數平方根的求解，要立即動用正餘弦半角律求解，因而產生多組解答，此時要更費心，嚴防遺漏或多列答案組數，心情要定，來回檢查以得精準答案，否則前功盡棄。

第二部分：非選擇題

在本部分中第一題為填充題，第二題至第五題為計算與證明題，請都在「非選擇題試卷」上作答。

一、填充題：

本題共有八個空格，每個空格5分，共40分；請答在「非選擇題試卷」上的第一欄，務必寫上格號（子，丑，……，未）後，再寫答案。（為節省「非選擇題試卷」空間，本題作答，請不要寫出演算過程。）

1. 解方程式 $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$ 所得的所有實根中，最大者為 子 ，最小者為 丑 。

2. 若以 x 表示 $\sin\theta$ 之值，則將三角方程式
$$\cos 4\theta=\sin\theta$$
表成 x 的四次方程式為 $\boxed{寅}$ ，此方程式的所有實根中最小者為 $\boxed{卯}$ 。

3. 設曲線 S 之參數方程式為
$$\begin{cases} x=\cos^2\theta\,, \\ y=\sin^2\theta+\sin\theta\,;\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$$
則 S 上的點與原點的距離，最小值為 $\boxed{辰}$ ，最大值為 $\boxed{巳}$ 。

從1到9876的自然數中，數字中有0的數（如102或3004等），共有 午 個，如果從1，2，3，……，一直寫到9876時，一共要寫 $\boxed{未}$ 個0。

第二部分：非選擇題

1. 令 $u=\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}$ 則更改原敍爲：解

$u+\dfrac{1}{u}=\dfrac{5}{2}$ 得 $2u^2-5u+2=0$ 即

$(2u-1)(u-2)=0$ $\therefore u=\dfrac{1}{2}$ *or* 2

(i)當 $u=\dfrac{1}{2}$，則 $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x^2-4x+3=0$，$x=3$，1

(ii)當 $u=2$，則 $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}=2$

$\therefore x^2+8x=0$，$x=-8$，0

ans：3，1；-8，0（最大爲3，最小爲-8）

【受測理論之結構】

1.° 擴充未知元型態化爲簡式。

2.° 有理式運算。

3.° 解二次方程式。

【本題之感悟】

莫以爲有理方程式求根是最容易的題目，必要沉着細心安全上壘才有分數，有得分才有價值。

本題運算輕巧，推理容易，答案明顯，唯一固定，不必花費很多時間來檢驗解答的準確度，做完本題，信心大增。

2. $2\cos^2 2\theta - 1 = \sin\theta$

$\Rightarrow\ 2(1-2\sin^2\theta)^2 - 1 = \sin\theta$

$\Rightarrow\ 8\sin^4 - 8\sin^2\theta - \sin\theta + 1 = 0$

當 $x=\sin\theta$ 得到“寅”的答案：

$8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0$

由綜合除法解得 $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4},\ -\dfrac{1}{2},\ 1$

$\because -1 \le x = \sin\theta \le 1$

$\therefore$ 取實根 $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4},\ -\dfrac{1}{2},\ 1$　全取。

最小實根爲 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$。

【受測理論之結構】

1° 倍角律。

2° 綜合除法有理根檢驗。

【本題之感悟】

使用倍角律，刻意化做 $\sin\theta$ 爲未知元的方程式，後來演成4次方程式，再用綜合除法求根，還好 $x=\sin\theta$ 的絕對值小於1的條件沒有用途，否則會造成很多失誤。

這題答案明顯，解出後可自行肯定，不必疑慮。

3. S 上之點的坐標爲 $(x, y) = (\cos^3\theta,\ \sin^3\theta + \sin\theta)$，$0 \le \theta \le 2\pi$

至原點的距離爲：$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$ $=\sqrt{x^2+y^2}$　但

x^2+y^2

$= \cos^6\theta + \sin^6\theta + \sin^2\theta + 2\sin^4\theta$

$= (\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta) + \sin^2\theta + 2\sin^4\theta$

$= 1\cdot[(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta] + \sin^2\theta + 2\sin^4\theta$

$= 1 - 3(1-\sin^2\theta)\cdot\sin^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin^4\theta$

$= 1 - 2\sin^2\theta + 5\sin^4\theta$

$= 5\left(\sin^2\theta - \dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{4}{5}$

於 $\sin^2\theta = \dfrac{1}{5}$ 時　$\sqrt{x^2+y^2}$ 有最小值

$\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ #

$\sin^2\theta = 1$ 時　$\sqrt{x^2+y^2}$ 有最大值

$\sqrt{5\left(1-\dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{4}{5}} = 2$ #

【受測理論之結構】

1.* 參數式之意義。

2.* 距離公式。

3.* 三角恒等式。

4.* 分解因式。

5.* 二次式的配方運用。

6.* 於 $0 \le \sin^2\theta \le 1$ 中求解。

【本題之感悟】

曲線上之點以 $(x, y) = (\cos^3\theta,\ \sin^3\theta + \sin\theta)$ 表示，這種智能和決斷的勇氣是靠平時對參數式有透徹了解，深入體驗得來，所以學習而不求甚解，今日應試吃虧甚大。繼由畢氏定理導出距離公式然後求 x^2+y^2 以 $\sin\theta$ 表之，一路演算，回到二次函數最大、最小值求解均爲基礎數學，若計算運作熟悉，展望答案不必苦思。又對 $0\le\sin^2\theta\le1$ 有心防就不易失誤，解此題是平常的事，不需絕技，死啃。

兩點距離的最小值求解可由參數代勞，這是數學的美感，顯示描述求解上之精確價值，我們一起來珍惜。

4.

1.* 二位數中，數字中有0的數，$\boxed{x}\ \boxed{0}$

$\downarrow$

1～9 計9個數

2.* 三位數中，數字中有0的數

(i)一個0 $\boxed{x}$ $\boxed{x}$ $\boxed{0}$

↓ ↓

1～9 1～9

" ⌒ " 表可交換位置的排列，如$\boxed{x}\boxed{0}\boxed{x}$

計 $9\times 9\times \underbrace{2}_{\text{交換排列}}$ 個數

(ii)二個0 $\boxed{x}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ 計9個數

↓

1～9

3.* 四位數中，數字中有0的數

(i)一個0 $\boxed{x}$ $\boxed{x}$ $\boxed{x}$ $\boxed{0}$

↓ ↓ ↓

1～9 1～9 1～9

$\boxed{x}\boxed{x}\boxed{0}$有同物全取排列

計 $9\times 9\times 9\times \dfrac{3\,!}{2\,!}=3\times 9^3$ 個數

(ii)二個0 $\boxed{x}$ $\boxed{x}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$

↓ ↓

1～9 1～9

計 $9\times 9\times \dfrac{3\,!}{2\,!}=3\times 9^2$ 個數

(iii)三個0 $\boxed{x}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ 計9個數

↓

1～9

總計：$9+9^2\times 2+9+3\times 9^3+3\times 9^2+9$

$=3\times 9+5\times 9^2+3\times 9^3$

$=2619$

扣除：9876～9999自然數中數字有0的數

即 9900，9910，…，9990 計10個數

9890，9880 計 2個數

9901，9902，…，9909 計 9個數

共21個數

所求：（午）$2619-21=2598$ #

4.* 於1.*的自然數中要寫出 1×9個0

於2.*的自然數中要寫出

(i) $9\times 9\times 2$個0

(ii) 9×2個0

於3.*的自然數中出現要寫出

(i) $3\times 9^3\times 1$個0

(ii) $3\times 9^2\times 2$個0

(iii) 9×3個0

總計：$9+9^2\times 2+9\times 2+3\times 9^3+3\times 9^2\times 2+9\times 3=2889$

扣除：9876以外的數

9900，9910，…，9990

計10個數×1個零＋1＝11

9890，9880

計2個數×1個零＝2

9901，9902，…，9909

計9個數×1個零＝9

所求（未） $2889-(11+2+9)=2867$ #

【受測理論之結構】

1° 基本分類統計之知能。

2° 有同物全取排列計算技巧。

3° 加法原理。

【本題之感悟】

因爲思考容易，人人會做，但解答較無信心，雖集中心力，努力檢算，常不能掌握滿意可得分的答案，所以要一再調整計算結果，而時間消耗在不知不覺中，影響別題作答，因此考生應當注意分配給這一題的時間要甄酌，以顧全大局。

提起排列、組合、機率這一部門之學習，多數的高中生爲之心寒，並非艱深不易學，而是計分答案只認定一眞確值，若有短估，算錯一律得零分，像是學習失敗的或全然無知一樣，打入敗部。我們以爲評分方式若有其他模式或傳統的計分方法稍有修改，可使學生學習興趣提高，信心增強，相信有不少的老師和學生具此願望。

以下第二題至第五題為計算或證明題，每題10分，請將演算過程答在「非選擇題試卷」上，先寫明題號（二、三、四、五），再作答。

二、(a)設 $x=u+\dfrac{1}{u}$，試將 $u^3+\dfrac{1}{u^3}$ 表為 x 的多項式。

(b)試利用(a)的結果，將方程式 $x^3-3x+1=0$ 的三根表為

$c=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$ 的有理式。

三、設 P_1，P_2，P_3 為拋物線 Ψ 上相異三點，過此三點各作 Ψ 的切線 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3，三線兩兩相交於 Q_1，Q_2，Q_3 三點，試證 $\triangle P_1P_2P_3$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的面積之比為 2：1。

四、設 a，b 為二常數，且對任一實數 x 恆有

$$\frac{(a+1)x^2+(a-2)x+(a+1)}{x^2-x+1}>b$$

試求 a，b 的條件，並在坐標平面上，圖示滿足前述條件的所有點（a，b）（特別要標出此區域之邊界、頂點。）

二、(a) $u^3+\frac{1}{u^3}=(u+\frac{1}{u})(u^2-u\cdot\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2})$

$=(u+\frac{1}{u})[(u+\frac{1}{u})^2-3]$

$=x(x^2-3)$

$=x^3-3x$

(b)令 $x^3-3x+1=0$ $\therefore x^3-3x=-1$

而 $u^3+\frac{1}{u^3}=-1$ $\therefore u^6+u^3+1=0$

$\Rightarrow u^3=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}$

立方根

$$u_k=\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\pm i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}$$

$c_0=u_0=\cos\frac{2\pi}{9}\pm i\sin\frac{2\pi}{9}$

（由已知取 $c=\cos\frac{2\pi}{9}\pm i\sin\frac{2\pi}{9}$）

$c_1=\cos\frac{8\pi}{9}\pm i\sin\frac{8\pi}{9}=c^4$ or c^{-4}

$c_2=\cos\frac{14\pi}{9}\pm i\sin\frac{14\pi}{9}=c^7$ or c^{-7}

$u+\frac{1}{u}=x$

而 $x=c+c^{-1}$，c^4+c^{-4}，c^7+c^{-7}

$=c+c^8$，c^4+c^5，c^7+c^2

【受測理論之結構】

1.* 基本對稱式演算。

2.* 代數功能強勁演算的理念。

3.* 解二次方程式的動力化解高次方程式。

4.* 笛莫夫定理。

5.* 變數機警運用　$x=u+\frac{1}{u}=c+c^{-1}$

【本題之感悟】

平日常見的方程式解法有綜合除法、分解因式、擴大未知元的型態如：$A(x^2+\frac{1}{x^2})^2+B(x^2+\frac{1}{x^2})+1=0$ ……以二次方程式求解與填充題第一、二題比較，合併回想，同是達到解方程式的理論目標，但是方法不一致，味道不同，背景懸殊。

1.* 填充題第一題於睜大眼睛時立即可辨明是 $u+\frac{1}{u}=\frac{5}{2}$ 的模式，擴充未知元形態求解方程式根爲普通必知的方法，成爲高中畢業生這個道理是不會陌生的。

2.* 填充第二題的層次升高，考到三角恒等式、倍角律的精彩演算，再廻轉解四次方程式，動用綜合除法有理根檢驗求根，當然我們要嚴防 $-1\le x=\sin\theta\le1$ 的條件限制，好在本題解的根均在此範圍內，檢不檢，無礙。當然解題要小心，觀念正確，否則功敗垂成。

3.* 非選擇題第二題（計算題）是卡丹公式解三次方程式的本質，命題先生不希望我們死背公式求解，而間接的從基本對稱式演算至多項式，然後由求複數之立方根的過程，輔導解得三次方程式 $x^3-3x+1=0$ 的根。迂回曲折，再再測量同學們的認知程度，同時亦讓考生在回答問題時學習如何運用方根求解方程式。考試使人緊張難奈，但是考試的本質亦是教學的一種方式，從答題中領悟課程的道理，這種命題在教育上是最成功的命題吧！

相信考生們對三次方程式卡丹公式的升學

準備不很精良，防守稍爲平淡，此番出題，策略精彩猶如強棒出擊，亦指導學生念書要細膩，講求理解，追求脈絡，還得貫穿全程旨意方有收穫。

三 1.* 取拋物線之標準式 $y^2 = 4cx$ 論之。

2.* 設 P_1，P_2，P_3 之坐標爲 $(ct_1^2, 2ct_1)$，$(ct_2^2, 2ct_2)$，$(ct_3^2, 2ct_3)$，t_1，t_2，t_3 爲相異實數。

3.* 過 P_1，P_2，P_3 之切線分爲：L_1, L_2, L_3

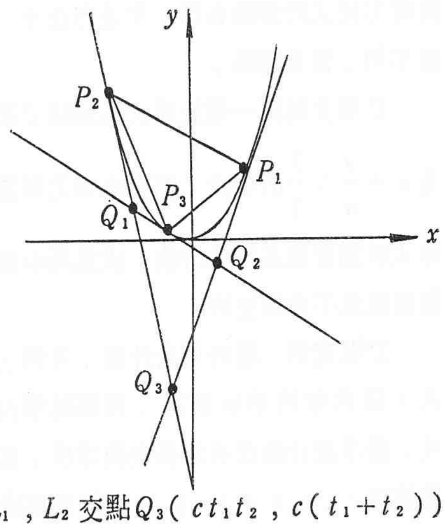
L_1：$2ct_1y = 2c(x+ct_1^2)$

即 $t_1y = x+ct_1^2$

而 L_2，L_3 分爲：

L_2：$t_2y = x+ct_2^2$

L_3：$t_3y = x+ct_3^2$



4.* L_1，L_2 交點 $Q_3(ct_1t_2, c(t_1+t_2))$

L_1，L_3 交點 $Q_2(ct_1t_3, c(t_1+t_3))$

L_2，L_3 交點 $Q_1(ct_2t_3, c(t_2+t_3))$

$$\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} ct_1^2 & 2ct_1 & 1 \\ ct_2^2 & 2ct_2 & 1 \\ ct_3^2 & 2ct_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$= c^2\left\|\begin{matrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$= c^2|(-1)^{\frac{3\cdot 2}{2}}(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_2-t_3)|$$

$$= c^2|(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_1-t_3)|$$

$$\triangle Q_1Q_2Q_3 = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} ct_2t_3 & c(t_2+t_3) & 1 \\ ct_1t_3 & c(t_1+t_3) & 1 \\ ct_1t_2 & c(t_1+t_2) & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{2}c^2\left\|\begin{matrix} t_2t_3 & t_2+t_3 & 1 \\ t_1t_3 & t_1+t_3 & 1 \\ t_1t_2 & t_1+t_2 & 1 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} (-1) \\ (-1) \end{matrix}$$

$$= c^2\times\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} t_2t_3 & t_2+t_3 & 1 \\ t_3(t_1-t_2) & t_1-t_2 & 0 \\ t_1(t_2-t_3) & t_2-t_3 & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{2}c^2|(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)|$$

$$= \frac{1}{2}\triangle P_1P_2P_3$$

$$\therefore \frac{\triangle P_1P_2P_3}{\triangle Q_1Q_2Q_3} = \frac{\triangle P_1P_2P_3}{\frac{1}{2}\triangle P_1P_2P_3} = 2$$

【受測理論之結構】

1° 一般拋物線以方程式表示。

2° 參數式表點之坐標。

3° 錐線之切線方程式。

4° 聯立方程組交交點坐標。

5° 行列式表三角形面積。

6° 行列式之運算。

7° Vandermonde 行列式。

8° 比例求值。

【本題之感悟】

平常即應明白選擇坐標系的用途，可用曲線的標準方程式代理一幾何圖形做一般性的討論，證明，此種知識相當寶貴，具備這一門知識於研究工作很有補益。而參數的演算再次受測，足證參數的重要性。行列式法求三角形面積可感覺運算輕鬆，解題輪廓大抵明顯，最後可以強迫思考演算以達自我決策的目標，完成任務。

四 1.* 由題意，$\forall x \in R$ 恒有

$$\frac{(a+1)x^2+(a-2)x+(a+1)}{x^2-x+1} > b$$

$\because x^2-x+1>0 \quad \forall x\in R$ 恒成立

$\therefore$ 可化爲 $(a+1)x^2+(a-2)x+(a$

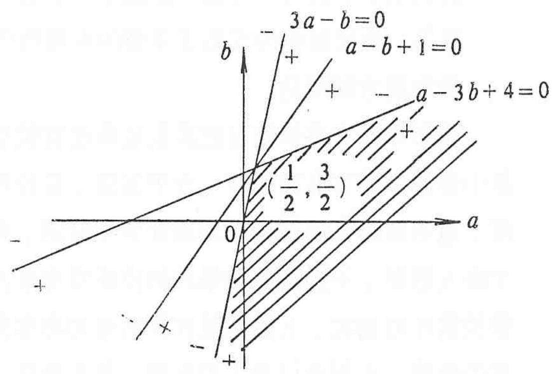
$+1)>b(x^2-x+1)$

即 $(a+1-b)x^2+(a+b-2)x+(a-b+1)>0$，$\forall x\in R$ 成立

2.* $\begin{cases} a-b+1>0 \\ (a+b-2)^2-4(a-b+1)^2<0 \end{cases}$ 成立

（$\because ax^2+bx+c>0$，$\forall x\in R$ 必 $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$）

即 $\begin{cases} a-b+1>0 \\ (3a-b)(a-3b+4)>0 \end{cases}$



ans：(i)不含邊界

(ii)頂點坐標 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 是 $\begin{cases} a-b+1=0 \\ 3a-b=0 \\ a-3b+4=0 \end{cases}$ 之公解

【受測理論之結構】

1° 絕對不等式靈活變型運轉。

2° 二次絕對不等式的必要條件認知。

3° 靈敏的更換座標系名稱。x 軸→a 軸，y 軸→b 軸

4° 條件不等式的解集合以圖形表之。

【本題之感悟】

1.* 有理式演算：$\frac{B}{A}>C$ 於 $A>0$ 時可以 $B>AC$ 處理之，此種基礎演算是考生不能不知的。

2.* $ax^2+bx+c>0$，$\forall x\in R$，必 $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$ 為解題的關鍵，平時學習當能注重意義了解。

3.* 解不等式之演算輕鬆，過程明朗。

4.* 圖示不等式組解集合應把 x，y 關係改敍為 a，b 關係，此方靈巧的運用，鮮活平敍的敎本解說，坐標系之學以致用，又一漂亮的出擊。

5.* 不等式之等號成立於圖形上的解說是含邊界的點。

6.* 頂點坐標是邊界方程式組的公解。

7.* 代數演算、幾何圖示，交相描述顯示數學的美感，這是敎本中一再強化的理念，74年的考題正就顯露敎材的本質。

五、$3x^2-4xy+6y^2-2x-8y-9=0$

1.* 中心 (h,k) 為方程組

$\begin{cases} 6h-4k-2=0 \\ -4h+12k-8=0 \end{cases}$ 之公解 $(1,1)$。

2.* 平移至 $(1,1)$：取 $x=x'+1$，$y=y'+1$ 代入原方程式得 $3x'^2-4x'y'+6y'=14$。

3.* 設坐標旋轉角 θ，則

$\cot 2\theta=\frac{3-6}{-4}=\frac{3}{2}>0$，$\theta$ 爲銳角，

$\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$。

4.* 設旋轉後得 $a'x''^2+c'y''^2=14$

$\because a'+c'=3+6=9$ $\therefore a'=2$，$c'=7$

$a'-c'=-\sqrt{(A-C)^2+B^2}=-5$

代回得 $2x''^2+7y''^2=14$

即 $\frac{x''^2}{7}+\frac{y''^2}{2}=1$。

5.* 長軸在 $x''=0$ 長 $\sqrt{7}$，短軸在 $y''=0$ 上長 $\sqrt{2}$。

6.* 長軸之斜角 θ，斜率 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，過 $(1,1)$

所以長軸所在直線之方程式爲：

$y=\frac{1}{2}(x-1)+1$ 即：$x-2y+1=0$

短軸垂直長軸且過中心 $(1,1)$ 其所在直線方程式爲 $2x+y=3$ #

【受測理論之結構】

1° 通泛公式～平移，旋轉，記憶本領之考驗。

2° 錐線基本元件之求法。

3° 三角函數半角律。
4° 直線方程式求解。

【本題之感悟】

這是二次曲線綜論的基礎題目，教本上仔細的介紹一般二元二次方程式經過平移，旋轉後如何得到錐線的標準式，再以新坐標系繪圖，求基本元件，顯示只要二元二次方程式均可繪圖。

雖然演算過程要用到公式演算，必死記後才能獲得速度以節省作答時間，思考其他考題，但這地方所使用的公式可說是“家喻戶曉”的速算式，不是“死啃”“絕技”型，修畢高中數學課程的高中生記憶能力不會有問題的。

叁、淺談數學命題的依據和創性教學法

長久以來於解題數學生涯裏不知不覺中竟累積了關於數學命題心態的經驗，從而體認出數學命題可依據預定的目標訂定，茲分述如下：

1.* 爲教學而命題：普通數學除講解並重複說明外，唯恐學生尚未深入領會，通常編定習題，刻意反映教本意義，反覆對學生實施測驗，幫助學生記憶，以便從事下一進度的推行，此種命題是依據教材進度特定。

2.* 爲標示功能而命題：數學美感培植亦是施教的內容，因爲要讓學生欣賞並活用某些定理的功能，謹愼歸納各種可能發生的事實，編列習題，教導學生，達到美感教育的目標。

3.* 爲解答問題而命題：某些日常生活，自然界現象以數學演算來描述、佐證，解除人們的疑惑產生命題的依據。

4.* 爲嚴格教學而命題：通稱“陷阱”的命題，爲貫徹嚴密的數學觀念不使學生錯用定理、定義，或一知半解而設計的一種題目，使解題者一不小心誤入陷阱，找到錯誤答案，藉以打入敗部使其重修而獲最佳學習效果，達成教學目標。

5.* 爲競技而命題：鑑別資賦優異的學生必需用超越學齡的問題來鑑別，盼能選拔優秀學生再加強教學，使其及早投入科技研究行列。這種競技的命題就是常聽到的“數學競試”。

6.* 爲選拔人材而命題：各階段的入學考試試題就是選拔人材用的命題，非常重視分數分佈型態，它看重高分，目的要選擇高分學生以便給與更高一階段的教育。完成各階段的教育目標。

7.* 爲驗收學習成果而命題：評鑑學生學習的成果，教師教學的成效而舉辦的各種校內的定期考試即是。

數學命題有些依據自然界現象即在實體世界中命題，因有事實根據，合乎常情，易於理解，也有超越自然現象在理論世界中命題，多半叫人懸疑，不過演算和推理的技能常有令人讚美歡呼的情境，上述兩種世界的命題均有美感的特質，也因此引起人們興趣，萬古長存。

有一種活潑而又有朝氣的教學方法是創性教學法，要學習者盡力列出可能答案，而後分析比較選擇判定答案，一反過去被動解題爲主動學習的心態，尙能獨立思考並具有尋求解答中再命題的勇氣和擔當，可說突破現時預定的教育目標而開創另一新境界，對於新時代的學習者很有助益，已經爲時下衆多敎師所採用，預料數學崇高的氣氛和境界不多久將更輝煌，我們等候這時代的來臨。

肆、結　語

74 年大學入學考試數學試題（自然組）於顧及考生的體能、心能、智能下，雖在短短 80 分鐘內不能將三年來高中教材考得淋漓盡致，但佈局週密，嚴防投機取巧，盡善盡美，亦達選拔人材，區分天賦的目標，更要緊的是鮮活教本長遠深刻的意義，我們感覺今後學習數學必依照教本精神刻意的發揮，不須苦心追求絕技，投機取巧，而要平時重視理解，親自演習習題，當有收穫！

（本文作者任教於台北市立建國中學）