9202 再論“ SDR ”解答（張鎭華提供）

考慮 $A=(A_1, \cdots\cdots, A_n)$ 滿足下列條件

(*) 對 $\{1, \cdots\cdots, n\}$ 的所有非空子集合 I，
$|\bigcup_{i\in I} A_i| \geq |I|+1$ 。

如果 $N(A)$ 表示 A 的 SDR 的個數，且 $t(n)=min\{N(A): A$ 滿足(*)$\}$，問題就是要求 $t(n)$，並找出 $N(A)=t(n)$ 的充要條件，我們將分兩個步驟去解答這個問題。

(甲)若 $A=(A_1, \cdots\cdots, A_n)$ 滿足(*)而且 $N(A)=t(n)$，則對所有 i 均有 $|A_i|=2$ 。

【證】$|A_i| \geq 2$ 顯然成立。

如果有某個 $|A_i| \geq 3$，爲了方便假設 $|A_1| \geq 3$ 。選取 $x, y \in A_1$，首先證明：$A'=(A_1 \setminus \{x\}, A_2, \cdots\cdots, A_n)$ 不滿足(*)，也就是可以找到 $I \subseteq \{2, \cdots\cdots, n\}$ 使得 $|(\bigcup_{i\in I} A_i) \cup (A_1 \setminus \{x\})| \leq |I|+1$ 。否則的話 A' 滿足(*)就存在最少有 $t(n)$ 個 SDR，這些都是 A 的 SDR 。其次再考慮 $A''=(A_2 \setminus \{x\}, \cdots\cdots, A_n \setminus \{x\})$，$A''$ 滿足 $P.\ Hall$ 條件，也就是對所有 $I \subseteq \{2, \cdots\cdots, n\}$ 均有 $|\bigcup_{i\in I}(A_i \setminus \{x\})| \geq |I|$，由 $P.\ Hall$ 定理可知：A'' 存在一個 $SDR(x_2, \cdots\cdots, x_n)$，則 $(x, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 是 A 的 SDR，但不是 A' 的 SDR，因此 A 至少存在 $t(n)+1$ 個 SDR，矛盾。

同理可知，存在$J\subseteq\{2,\cdots\cdots,n\}$使得$|(\bigcup_{i\in J}A_i)\cup(A_1\setminus\{y\})|\le|J|+1$。

由兩個不等式知$|I|+1+|J|+1$

$$\ge|(\bigcup_{i\in I}A_i)\cup(A_1\setminus\{x\})|+|(\bigcup_{i\in J}A_i)\cup(A_1\setminus\{y\})|$$

$=$ | 兩者聯集 | + | 兩者交集 |

$$\ge|(\bigcup_{i\in I\cup J}A_i)\cup A_1|+|(\bigcup_{i\in I\cup J}A_i)\cup(A_1\setminus\{x,y\})|$$

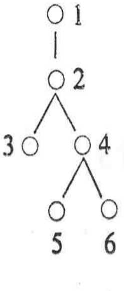
$$\ge\begin{cases}|I\cup J|+2+|I\cap J|+1 & \text{若 } I\cap J\neq\phi\\ |I\cup J|+2+|A_1\setminus\{x,y\}| & \text{若 } I\cap J=\phi\end{cases}$$

$$\ge|I\cup J|+2+|I\cap J|+1$$

$$=|I|+|J|+3$$

矛盾，所以得證。

(乙)以$V=\cup\{A_i:1\le i\le n\}$爲頂點集（vertex set），$E=\{A_1,\cdots,A_n\}$爲邊集（edge set），可以造成一個無向圖（undirected graph）$G=(V,E)$。圖G不含有迴路（cycle），否則這個迴路的邊所對應的k個集合，其聯集恰有k個元素，這和A滿足(*)不合。假設G是樹形圖（tree），則用歸納法可以證明$N(A)=n+1$，例如



$A_1=\{1,2\}$

$A_2=\{2,3\}$

$A_3=\{2,4\}$

$A_4=\{4,5\}$

$A_5=\{4,6\}$

若G由兩個或更多的樹形圖合成，即$G=G_1\cup\cdots\cdots\cup G_r$，其中每一個$G_i=(V_i,E_i)$都是樹形圖，由$E=E_1\cup\cdots\cdots\cup E_r$，則

$$N(A)=N(G)=N(G_1)\cdots\cdots N(G_r)$$

$$=(|E_1|+1)\cdots\cdots(|E_r|+1)$$

$$\ge\cdots\cdots+|E_1|+\cdots\cdots+|E_r|+1$$

$$>|E|+1=n+1$$

(丙)由(甲)和(乙)的推論，可得$t(n)=n+1$，而且對滿足(*)的A而言，$N(A)=t(n)$的充要條件是它所對應的圖是樹形圖。