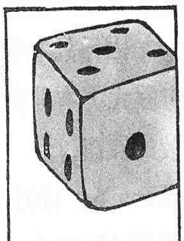

機率專題

漫談布朗運動

李育嘉

一、布朗運動簡史

西元1827年，英國植物學家勞伯·布朗(Robert Brown)利用一般的顯微鏡觀察懸浮於水中的花粉粒時發現這些花粉粒會做連續快速而不規則的隨機移動，這種移動稱爲布朗運動(Brownian motion)。接着生物學家發現懸浮於液體或空氣中直徑小於0.04公分的粒子都會產生布朗運動。譬如，當陽光射進暗室時，我們很容易從光束中觀察到灰塵粒子在空氣中產生布朗運動的現象。

事實上，布朗並非第一個發現布朗運動者。布朗在提到1819年Bywater發表的一篇文章時曾說：「不但是有機物質，無機物質也包含他(指Bywater)所謂活潑的或激應性的粒子」。由此我們還察覺到十九世紀初生物學家還以爲布朗運動的發生是由於粒子本身是「活的」的緣故。直到1917年這種粒子的「生機說」才被D'Arcy Thompson所推翻。Thompson認爲布朗運動之所以會發生是因爲粒子與液體或氣體分子連續互相碰撞的結果。

自1860年以來，許多科學家都在研究此種現象。經由謹愼的實驗及討論，科學家發現布朗運動有下列主要特性：

一、粒子的運動由平移及轉移所構成，顯得非常沒規則而且其軌跡幾乎是處處沒有切線。

二、粒子之移動顯然互不相關，甚至於當粒子互相接近至比其直徑小的距離時也是如此。

三、粒子越小或液體粘性越低或溫度越高時，粒子的運動越活潑。

四、粒子的成分及密度對其運動沒有影響。

五、粒子的運動永不停止。

其中，關於第一點，數學上的確存在處處連續而處處不可微分的函數。例如$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\cos 2^{n}t$(Weiertrass函數)便是。事實上，從布朗運動的數學定義(見第三節定義一)，我們可證明幾乎每一布朗運動的軌跡皆處處不可微分(因此也就沒有切線)。第二點曾被布朗所提及。第五點則是由觀察一個樣本二十年及觀察在一個千年石英礦中之液體所得到的結論。

二十世紀初，愛因斯坦(Einstein)及史莫廬可夫斯基(Smoluchovski)發現不管粒子的運動有多麼不規則，布朗運動仍可以用

機率律來分析，其研究說明了粒子在一段時間內之位移是根據常態分配的。愛因斯坦的工作可以說是布朗運動的動力論的先驅。今將其結果（發表於 1906 年）概述於下：

令 $\rho=\rho(x, t)$ 是一個布朗運動粒子在時間 t 及位置 x 時之機率密度（$x\in \mathbb{R}^3$）。然後在某些機率的假設下，愛因斯坦導出

$$\frac{2\rho}{2t}=D\triangle\rho\ ,$$

這裡 D 表一正常數，稱之爲擴散係數（Dif - fussion coefficient ）。假若粒子在 $t=0$ 之位置爲 $x=0$，則

$$\rho(x,t)=\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\right)^3 e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}\ 。$$

1923年，諾伯特・衞納（Norbert Wiener）首先把布朗運動當作一種隨機過程（Stochastic Process）來研究。因此，布朗運動也叫做衞納過程（Wiener Process）。接着衞納之後有Bachelier 的啓發性的工作。不久，Paul Lévy 及後來的研究者將布朗運動發展成目前的巨構。如今布朗運動在理論上與應用上已與帕松過程（Poisson process）構成了兩種最基本的隨機過程。在本文之中我們將首先探討隨機漫步（Random walk）之基本性質，然後利用一組隨機漫步的極限來導出布朗運動的數學模式。讀者若對本文中之名詞有不明之處請參見參考資料〔6〕。

二、隨機漫步

假想一個粒子在一水平直線上一步步的左右移動而且每步的距離皆爲一個單位長；其向右及向左的機率各爲 p 與 $q=1-p$（$0<p<1$）。此外，我們假設每一單位時間只移動一步而且第 n 步在第 n 個瞬間獨立做動作。若視直線爲 R^1 而視一個單位長爲 1（向右一步以 $+1$ 表示，向左一步以 -1 表示），則此粒子在 R^1 上之可能位置爲整數，其數學模式描述如下：

設 X_n 爲粒子第 n 步的位移，則 $\{X_n: n\in N\}$ 爲一族取值 $\{+1, -1\}$ 的獨立隨機數，而且對任一整數 $n\geq 1$，

$$P\{X_n=1\}=p$$
$$P\{X_n=-1\}=q\ 。$$

若以 W_0 表粒子之原始位置，則在時間 n 時粒子的位置爲

$$W_n=W_0+X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n\ 。$$

此一序列的隨機變數 $\{W_n: n=0, 1, 2, \cdots\}$ 便叫做隨機漫步。$\{W_n\}$ 所在的樣本空間 Ω 可取爲

$$\Omega=\{\omega: \omega=(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\cdots),\ \omega_i\in \mathbb{Z}\},$$

然後定義 $W_n(\omega)=\omega_n$。當 $p=q=\frac{1}{2}$ 時，我們稱 $\{W_n\}$ 爲對稱隨機漫步。以下我們概述隨機漫步的幾個基本性質。

令 $P_n^r(i, j)=P\{W_{n+r}=j\,|\,W_n=i\}$，$P_n(i, j)=P_n^1(i, j)$，$p_{ij}=P_0(i, j)$，$p_{ij}^r=P_0^r(i, j)$。顯然，當 $i=j$ 時 $p_{ij}^0=1$，否則 $p_{ij}^0=0$。

定理一：

(1) $0\leq P_n^r(i, j)\leq 1$，而且 $\sum_{j\in Z} P_n^r(i, j)=1$。

(2) $P\{W_{n+r}=j\,|\,W_0=i_0, W_1=i_1, \cdots\cdots, W_n=i_n\}$ $=P\{W_{n+r}=j\,|\,W_n=i_n\}=P_n^r(i_n, j)$，$\forall\ r\geq 1$。

(3) $P_n^r(i, j)=P_0^r(i, j)=p_{ij}^r$，$\forall\ n\geq 0$

特別地，$P\{W_{n+1}=j\,|\,W_n=i\}$

$$=p_{ij}=\begin{cases} p, & 當\ j=i+1, \\ q, & 當\ j=i-1, \\ 0, & 當\ j=i\ 。\end{cases}$$

(4) 設 $0\leq n_1<n_2<n_3<\cdots\cdots<n_k$，則 $\{W_{n_k}-W_{n_{k-1}}, \cdots\cdots, W_{n_2}-W_{n_1}\}$ 爲獨立

隨機變數。

定理一之(1)顯然成立。(2)說明了當「現在」(指時間n)之位置為已知時，則「過去」(指小於n之時間)與「未來」(指時間$n+r$)無關。此性質稱為**馬可夫**(markov)性質。因此隨機漫步為一馬可夫過程。性質(3)表示粒子之位置從i轉移至j的機率與原位置之時間無關，此性質叫時間齊一性(time-homogeneous)。p_{ij}叫做隨機漫步的轉移機率(transition probability)。(4)的性質是因$\{X_n\}$為獨立隨機變數之故；由於該性質我們稱$\{W_n\}$具有獨立增量(independent increments)。

系一：令$P=(p_{ij})$為p_{ij}所成之矩陣。P稱為轉移矩陣或轉移函數。則

$$
P=\begin{array}{c}
\\ \vdots \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccc}
\ddots & \ddots & & & & & & & \\
\ddots & 0 & p & & & & & & \\
 & q & 0 & p & & & & & \\
 & & q & 0 & p & & & & \\
 & & & q & 0 & p & & & \\
 & & & & q & 0 & p & & \\
 & & & & & q & 0 & p & \\
 & & & & & & q & 0 & \ddots \\
 & & & & & & & q & \ddots
\end{array}\right)
\end{array}。
$$

此外，$p_{ij}^{\,n}=P^n(i,j)$。

令$A\subseteq \boldsymbol{Z}$。定義$f_A(i)=P\{W_k\in A,\forall k\geq 1\mid W_0=i\}$($i\in A$)。$f_A(i)$表示$\{W_n\}$從$A$中之點$i$出發一直留在$A$中之機率。

定理二：若A只包含有限個整數，則$f_A(i)=0$，$\forall i\in A$。

證明：我們只證明$A=\{m,m+1,\ldots\ldots,m+M\}$的情形就足夠了。令$Q$為由矩陣$P$去掉不在$A$中之行列後所形成的矩陣，顯然，

$$
Q=\begin{pmatrix}
0 & p & & & & \\
q & 0 & p & & & \\
 & q & 0 & p & & \\
 & & q & 0 & \ddots & \\
 & & & \ddots & \ddots & p \\
 & & & & q & 0
\end{pmatrix}。
$$

對i，$j\in A$，

(2.1) $Q^n(i,j)=P\{W_1\in A,W_2\in A,\ldots\ldots,W_n=j\mid W_0=i\}$。

令$f_n(i)=\sum_{j=m}^{m+M}Q^n(i,j)$。由(2.1)得知

$f_n(i)=P\{W_k\in A,\forall k=1,2,\ldots\ldots,n\mid W_0=i\}$

而且 $0\leq f_n(i)\leq f_{n+1}(i)\leq 1$ $\forall n\geq 1$，

故$\lim_{n\to\infty} f_n(i)$存在且其值恰為$f_A(i)$。又由於$Q^{n+1}=QQ^n$，我們有

(2.2) $f_{n+1}(i)=\sum_{j=m}^{m+M}Q(i,j)f_n(j)$。

在(2.2)中，令$n\to\infty$得

(2.3) $f_A(i)=\sum_{j=m}^{m+M}Q(i,j)f_A(j)$。

設$x_i=f_A(m+i)$，$i=0,1,2,\ldots\ldots,M$，由(2,3)，(x_i)滿足以下聯立方程組

$$
(2.4)\quad \begin{cases}
x_0=px_1 \\
x_1=qx_0+px_2 \\
\vdots \\
x_i=qx_{i-1}+px_{i+1} \\
\vdots \\
x_{M-1}=qx_{M-2}+px_M \\
x_M=qx_{M-1}
\end{cases}
$$

由(2.4)前M個方程式解得

(2.5) $x_i=\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{q}{p}\right)^i\right)x_0$，$i=0,\ldots\ldots,x_M$

特別地，

(2.6) $x_M=(1+(\frac{q}{p})+\cdots\cdots+(\frac{q}{p})^M)x_0$。

但是由(2.4)最後的等式，我們又得到

(2.7) $x_M=q(1+(\frac{q}{p})+\cdots\cdots+(\frac{q}{p})^M$
$)x_0$ 。

比較(2.6)與(2.7)得 $x_0=0$，故由(2.5)得 $x_i=0$，$\forall i=1,2,\cdots\cdots,M$。所以 $f_A(i)=0\ \forall\ i\in A$。

定理二說明了作隨機漫步的粒子非常「不安於位」，此性質與布朗運動粒子相似(見定理四之(3)))。

以下我們只討論 $\{W_n\}$ 爲對稱的情形而且我們讓所有的隨機漫步皆從原點開始，也就是說 $W_0=0$。

定理三：$E[W_{n+k}|W_n=i]=i\quad(k\in N)$。

證明：$E[W_{n+k}|W_n=i]$

$=\sum_{j\in Z} jP\{W_{n+k}|W_n=i\}$
(條件期望值的定義)

$=\sum_{j\in Z} jP\{W_k|W_0=i\}$
(利用定理一之(3))

$=E[W_k|W_0=i]$

$=i+\sum_{j=1}^{K} E[X_j|W_0=i]$

$=i+\sum_{j=1}^{K} E[X_j]$
(因 X_j 與 W_0 相互獨立)

$=i$ (因爲 $E[X_j]=p-q=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$)。

定理三說明了當粒子進行隨機漫步中，某甲在時間 n 時開始觀察，剛經過 k 時間後，粒子的預期位置爲某甲開始觀察的位置——W_n。當 i 任意變動時，定理三可改寫爲 $E[W_{n+k}|W_n]=W_n$。若我們把 W_n 看作某賭徒在時間 n 時身上所有金錢總數，則照定理三的意思，該賭徒在時間 n 時帶着 i 元進入賭場參與賭博而 k 時間後，該賭徒應是不輸也不贏的帶着 i 元離去。因此，定理三之性質又稱爲平賭性質(martingale property)(martingale是法國民間一種公平的對局)。下一節我們將發現布朗運動也是一種平賭過程。從隨機漫步的軌跡來看，我們可視隨機漫步爲布朗運動離散化之情形，它的確可幫助我們了解布朗運動。

三、布朗運動的數學模式

首先我們建立 R^1 上的布朗運動。我們的作法簡單地說是利用對稱隨機漫步，縮小其每一步長度而在單位時間內加速其移動頻率來模擬布朗運動。

假想一個粒子在座標軸上以原點爲起始點作對稱隨機漫步，每一步的位移爲 δ 而每單位時間內移動次數爲 r 次，則此粒子在時間 t 時之位置爲 $Z_t=\delta W_n$，$n=rt$，其中 $\{W_n\}$ 是第二節所談的對稱隨機漫步而且 $W_0=0$。由 $\{W_n\}$ 之性質知 $E(Z_t)=(p-q)\delta n=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})\delta n=0$，$V_{ar}(Z_t)=4pq\delta^2n=\delta^2rt$。令 $\delta\to 0$，$r\to\infty$，使得 δ^2r 逼近一定數 D(譬如，取 $\delta=Dr^{-\frac{1}{2}}$)，由中央極限定理(Central Limit Theorem)，我們得到

(3.1) $P\{Z_t<\beta\}=P\{\delta W_n<\beta\}$

$$\sim\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi n}}\int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2n\delta^2}}\,dx$$

$$\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2Dt}}\,dx\ 。$$

爲求簡化起見，我們設 $D=1$。令 B_t 爲 Z_t 之極限隨機變數，則 $\{B_t: t\geq 0\}$ 便叫做布朗

運動或衞納過程。由以上之討論，我們嚴格地定義布朗運動如下：

定義一：令 $\{B(t): t \geq 0\}$ 爲一隨機過程且滿足以下三個條件：

(1) $B(0)=0$

(2) 設 $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots\cdots < s_{n+1} < \infty$，則 $\{B(s_{j+1})-B(s_j): 0 \leq j \leq n\}$ 爲獨立隨機變數族。

(3) 對每一 $s \geq 0$，$t \geq 0$，$B(t+s)-B(s)$ 有常態分配 $N(0, t)$，換句話說

$$P\{B(t+s)-B(s) < \beta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \text{。}$$

其中(1)與(2)皆是繼承 $\{Z_t\}$ 之性質而來，(3)也表示布朗運動對時間有齊一性。合併(2)(3)之性質，我們稱 $B(t)$ 有平穩獨立增量（stationary independent increments）。對任意 $a \in \boldsymbol{R}^1$，$\{B(t)+a\}$ 一般叫做以 a 爲起點的布朗運動。$\{B(t)\}$ 所在的樣本空間可取 $\Omega=\{\omega(t): \omega$ 爲 $[0, \infty)$ 上之連續函數且 $\omega(0)=0\}$，然後定 $B_t(\omega)=\omega(t)$，（B_t 與 $B(t)$ 兩個記號通用）。令 $I=[a, b]$，定義

$$p(s, x, t+s, I)=P\{B(t+s) \in I \mid B(s)=x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2t}(u-x)^2} du \text{。}$$

$p(s, x; t+s, I)$ 稱爲 $\{B(t)\}$ 之轉移函數。顯然，$p(s, x; t+s, I)$ 與 s 無關，因此我們把 $p(s, x; t+s, I)$ 改寫爲 $p(t; x, I)=p(s, x; t+s, I)$。其次若我們定

$$p_t(I)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2t}} du,$$

則顯然，$p(t, x, I)=p_t(I-x)$。再深入一點討論，考慮一個單位時間內之布朗運動；其樣本空間爲 Ω 可取爲 $\Omega=C[0, 1]=\{x(t): x(t)$ 在 $[0, 1]$ 間連續而且 $x(0)=0\}$。設 $0=s_0 < s_1 < s_2 < \cdots\cdots < s_n \leq 1$，$I_i=[a_i, b_i]$，$i=1, 2, \cdots\cdots, n$。令 $E=\{x \in \Omega: x(s_1) \in I_1, \cdots\cdots, x(s_n) \in I_n\}$，然後定義

$$\begin{aligned} &W(E) \\ &=P\{B(s_1) \in I_1, \cdots\cdots, B(s_n) \in I_n\} \\ &=[(2\pi)^n s_1(s_2-s_1)\cdots\cdots(s_n-s_{n-1})]^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot \int_{a_n}^{b_n} \cdots\cdots \int_{a_1}^{b_1} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{u_1{}^2}{s_1}+\frac{(u_2-u_1)^2}{s_2-s_1}\right.\right. \\ &\left.\left.+\cdots\cdots+\frac{(u_n-u_{n-1})^2}{s_n-s_{n-1}}\right]\right\} du_1 \cdots\cdots du_n \end{aligned}$$

。

W 稱爲衞納測度。衞納利用 W 來研究布朗運動；也因此發展無窮維空間 $C[0, 1]$ 上的積分理論（參見〔3〕）。

定義一並未保證軌跡 $g(t)=B_t(\omega)$ 爲連續，但可以證明存在一連續布朗運動 $\{\widetilde{B}(t)\}$ 使得對任何 $t>0$，$P\{B(t) \neq \widetilde{B}(t)\}=0$。

以下我們只考慮連續的布朗運動。

定理四：

(1) $P\{B(t+s) \mid B(u); u \leq t\} = P\{B(t+s) \mid B(t)\}$。

(2) $E[B(t+s) \mid B(u); u \leq t] = B(t)$。

(3) $\{B(t)\}$ 停留在任一有界集合之機率爲零。

(4) 幾乎所有 $B(t)$ 的軌跡皆是處處連續而處處不可微分。

定理四之(1)表示布朗運動爲馬可夫過程；(2)說明 $\{B(t)\}$ 爲平賭過程。以上二者皆可由定義一之(2)證明之。第(3)點與隨機漫步之性質（定理二）相似。事實上，若 C 爲一正數，則 $\lim\limits_{t\to\infty} P\{|B(t)| \leq C\}=0$ 以性質包含(3)

。第(4)點說明布朗運動與實際現象相符合，其證明則比較難（參見〔2〕）。

例一：$E[W(t)W(s)]=min(t,s)$。

證明：假設 $t\geq s$，則

$$E[W(t)W(s)]$$
$$=E[(W(t)-W(s))W(s)+W^2(s)]$$
$$=E[W(t)-W(s)]E[W(s)]+Var[W(s)]$$
$$=0+s=min(t,s)$$

同理，若 $s\geq t$，則

$$E[W(t)W(s)]=t=min(t,s)。$$

例二：$E[B(t+s)^2-(t+s)\mid B(u);\ u\leq s]=B(s)^2-s$。

證明：利用 $\{B(t)\}$ 馬可夫性質，我們有

$$E[B(t+s)^2-(t+s)\mid B(u);\ u\in s] = E[B(t+s)^2-(t+s)\mid B(s)]。\tag{3.2}$$

另一方面

$$E[B(t+s)^2-(t+s)\mid B(s)]$$
$$=E[(B(t+s)-B(s))^2+2B(t+s)\cdot B(s)-B^2(s)\mid B(s)]-(t+s)$$
$$=E[(B(t+s)-B(s))^2]+2E[(B(t+s)-B(s))B(s)\mid B(s)]+E[B(s)^2\mid B(s)]-(t+s)$$
$$=t+2B(s)E[B(t+s)-B(s)]+B(s)^2-(t+s)$$
$$=B(s)^2-s$$

以上之計算中，我們利用以下兩有條件期望值的等式：(一)$E[XY\mid X]=XE[Y\mid X]$，(二)$E[f(X)\mid X]=f(X)$。我們假設 X 取值於 $\boldsymbol{Z}$ 中時來驗證(一)(二)：

(一)$E[XY\mid X=j]=E[jY\mid X=j]=jE[Y\mid X=j]$。當 j 變化時上式變成 $E[XY\mid X]=XE[Y\mid X]$。

(二)$E[f(X)\mid X=j]=E[f(j)\mid X=j]=f(j)E[1\mid X=j]=f(j)$，故 $E[f(X)\mid X]=f(X)$。

例二說明當 $\{B(t)\}$ 為布朗運動時，$\{B(t)^2-t\}$ 亦為平賭過程，反之以然（定理五）。

定理五：（Lévy）．隨機過程 $\{B(t);\ t\geq 0\}$ 為布朗運動之充要條件為

(1) $\{B(t)\}$ 為平賭過程。

(2) $\{B(t)^2-t\}$ 為平賭過程。

Lévy 定理提供我們一個檢查給定的隨機過程 $\{B(t)\}$ 是否為布朗運動的方法：對任何時間 $T\geq 0$，若 T 以後 $\{B(t)^2\}$ 及 $\{B(t)^2-t\}$ 之平均值分別為 $B(T)$ 及 $B(T)^2-T$ 時，則 $\{B(t)\}$ 必然是布朗運動。

布朗所觀察到的布朗運動當然是三度空間的運動，但由觀察顯示粒子在各方向之移動是獨立的，因此我們採用以下定義：

定義二：設 $B(t)=(B_1(t),B_2(t),B_3(t))$ 為 $\boldsymbol{R}^3$ 上的隨機過程。若 $\{B_i(t)\}$，$i=1,2,3$ 三過程相互獨立而且分別為 $\boldsymbol{R}^1$ 上的布朗運動時，我們稱 $\{B(t)\}$ 為 $\boldsymbol{R}^3$ 上之布朗運動。

四、结　語

也許讀者會問：「定義二是布朗所見的布朗運動嗎？」。答案可能是否定的。至少，我們沒有理由相信，因為在定義過程中我們可能已過分簡化了真正的布朗運動。依本人之見定義二是否為真正的布朗運動並不重要；重要的是定義二提供給科學與工程為建立隨機模式的一個不可缺的基本工具。另一方面，定義二之布朗運動在隨機過程的動力論（見〔4〕）中也扮演着一個重要的角色也使隨機過程之理論添

加了新的生命(如隨機積分與隨機微分方程等)。這一切仍然要歸功於布朗所給數學家的「動機」。數學本來就是靠着科學不斷的給予「動機」而成長的!

參考資料

1. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*; Vol, 1 (Thirdedition), John Wiley and Sons, Inc. New York, N.Y. (1968)
2. A. Friedman, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Vol. 1, Academic Press, New York (1975).
3. H.-H. Kno, *Gausian Measure in Banach Spaces*, LN. 463, Springer-Verlag (1975).
4. E. Nelson, *Dynamical Theories of Browrian Motion*, Princeton University Press, (1967).
5. K. L. Chung, *Elementary Probability Theory With Stochastic* Procesees, Springer-Verlog, (1974).
6. 幼獅數學大辭典,幼獅文化事業公司(1983)。
7. *Encyclopedia International*, Grolier, New York (1974).

—本文作者為成功大學應用數學研究所所長—