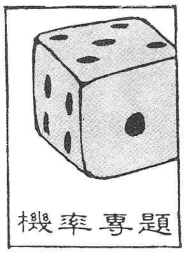

機率史簡介

林大風・曾憲政

一、陳仁英的半天

車子停在紅燈前，陳仁英坐在擁擠的公車裡，把疲乏的身體靠著椅背。心裡希望早點回到家，好好的休息。只覺得今天的公車老是在碰紅燈，運氣眞差！看著路傍的雨後積水，越想越懊惱！雖然這時車子又開動了，腦子裏仍在回憶剛才的一場球賽。昨天氣象預報說今天不會下雨，却在足球比賽時傾盆一陣。自己本來是位很穩重的後衞，却在一次緊急救球時，因地濕而滑了一跌，不但沒把球救出，反而把它送進網裏。就是這一球，使得中文系贏了球賽，眞是氣人。

車子漸漸的慢下來，前面的十字路口擁塞了一大堆車子。擡頭前看，原來是交通燈壞了，四面八方的車子都堆在一起，寸步難行。記得這個紅綠燈不久前才修過，怎麼又發生故障了！眞奇怪！要過這個街口可難了，乾脆閉上眼睛，稍爲休息。想起上午發回的物理考卷，只有少數人考得很好，少數極差。自己的成績雖然平平，和多數人一樣，却還及格，心裏總算安慰些。

今天陳仁英回到家的時間比平常晚多了，上床的時間反而早了。在甜睡中，十公尺外投籃，空心命中。同學們大喊：陳仁英加油！數學系加油！

雖然以上的故事是杜撰的，但是所發生的事如下雨、球賽、考試、交通燈、塞車、故障、回家時間、作夢等事或現象，諸位讀者或多或少都親身經歷過。它們和機率都有關係。只是大部份的人不知不覺而已！也許有些讀者覺得奇怪！在上文中並沒有提到骰子、銅幣或紙牌，怎麼會和機率有關呢？大家都知道擲骰子、丟銅幣和玩紙牌和機率有非常密切的關係。它們在機率學的起源與發展上佔有極端重要的地位。但是它們在機率學裡只算是小小的一部份！

諸位讀者可知道爲什麼一滴墨水滴到水中後就會散開？同學們用同樣的方法和儀器做同樣的化學或物理實驗，結果會完全相同嗎？家裏用的燈泡可確定那一天會壞嗎？你們可知道細菌是如何繁衍的？原子核分裂後如何產生連鎖反應？這些問題都可用機率學來探討。今天的機率學是數學的一支，它有深奧的理論與廣泛的應用。它不僅在自然科學、工程學和社會科學有重要的應用，對其他純數學也有應用。

筆者將在本文簡單的介紹機率學的起源和發展，並且討論一些簡單的問題。希望能引起諸者對機率學的興趣。

二、機率學前史

大自然中本來就到處充滿了很多的隨機現象，只是古代的人知識閉塞，無法解釋。都解釋成「天意」、「命中註定」、「神的意旨」等。在數學家開始研究機率以前，人類有許多活動與隨機現象有關。這些活動後來直接或間接的促成了機率學的起源！

考古學家在地中海沿岸地區，尤其是在非洲，發掘史前遺跡時，常發現大量的牛、羊或鹿（在足踝上）的距骨（Astragalus）。這些骨頭約成六面體。但是擲在地上後，只有四面可以向天。考古學家相信這些距骨和宗敎儀式有關。它們的功能可能是用來卜卦用的，也可能與中國人神桌上的「神盃」類似。

從古埃及人的畫和希臘人燒的陶器中，可以看到人類在玩距骨。可見得距骨已經逐漸的被人類拿來作爲遊戲或賭博用。慢慢的，人類把距骨磨成今天骰子的形狀，也有人把石頭或礦石磨成骰子，開始作賭博遊戲。目前所發現最早期的骰子是在伊拉克出土的，已經有四、五千年的歷史了。在印度也發現早期的骰子。後來在發掘出來的羅馬帝國時代的骰子裏，有的

骰子的部份內部是中空的。顯然是在賭博時作弊用的。羅馬帝國第一位皇帝奧古斯都（Augustus，63 B.C.—A.D. 14）和另外一位皇帝科勞第阿斯（Claudius，10 B.C.—A.D. 54）都是有名的玩骰子嗜好者。後來羅馬人瘋狂的喜歡玩骰子，嚴重到帝國必需頒佈法令，禁止賭博。除了骰子以外，人類還有其他賭具，但都不如骰子普遍。

在中世紀時代（黑暗時代），賭博在歐洲很盛行。雖然皇帝和教廷嚴禁賭博，可是成效不彰。許多國家開始允許有限度的賭博。在第三次東征的十字軍裏，騎士和教士是被允許作適量的賭博的。

文藝復興以後，（歐洲）人們思想開始擺脫「神的意旨」的桎梏。懂得提出疑問，討論問題。由於賭博的普及，賭博方面的隨機概念逐漸形成。各國政府又作人口、土地、財產等的調查，以作爲納稅的依據。有了調查就有統計資料，有了統計資料就容易使人產生簡單的機率概念。另一方面，由於科學的進步，需要各方面的試驗、觀察、測量和誤差的處理，急需機率學方面的知識。加上工商業的發達，貨物錢幣的交流，保險與撫恤問題的需要等。各種條件都成熟了，於是有人開始探討機率問題。以下三位都是義大利人。

1.帕西歐里（Paccioli）在1487年曾考慮如下之分產問題：甲乙共有64元。兩人猜拳比賽，先贏60次的人可得全部之錢。當甲贏50次，乙贏30次時，由於某種原因，比賽必須停止。問甲乙如何分此64元才公平。帕西歐里的答案是

$$甲應得 = 64\times\frac{5}{8} = 40，$$

$$乙應得 = 64\times\frac{3}{8} = 24。$$

諸位讀者同意這個答案嗎？

2.戛旦諾（Cardano，1501～1576）曾寫一本關於機會遊戲的書，討論擲骰子的遊戲。書上並說帕拉米德（Palamedes）在特洛伊戰爭（木馬屠城之戰）時，因圍城多年，惟恐士兵厭戰，爲了鼓舞士氣而發明了賭博。

3.加利略（Galileo，1564～1642）：這位傑出而可憐的科學家曾討論如下問題：擲三個骰子，其和爲9與10的組合各有6種，即

$$\begin{aligned} 9 &= 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 \\ &= 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3, \\ 10 &= 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 \\ &= 2+4+4 = 2+3+5 = 3+3+4。\end{aligned}$$

爲什麼出現10的情況會比出現9的情況多呢？在他詳細計算之後，他發現在216種情況裏，有25種的和是9而有27種的和是10。因此出現10的機會比出現9的機會大些。

加利略豐富的天文觀測經驗告訴他每次的觀測值都不同，因而使他有誤差的概念。他是第一個提出誤差問題的人。

三、早期的發展

早期的機率問題大都是離散型的，以後才漸漸的發展到連續型的機率問題。爲了使還沒學過微積分的讀者能了解本文，我們先介紹一些數學符號：

a.令

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2.718\cdots\cdots 。$$

b.若 f 爲實數 R 上之非負連續函數，$-\infty \leqq a$

$< b \leq \infty$，則令$\int_a^b f(x)dx$ 表 $y = f(x)$ 之圖形，x 軸及 $x = a$，$x = b$ 兩直線所包圍之區域的面積。如果$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$，我們稱 $f(x)$ 爲一（機率）密度函數。

c.令 X 代表一隨機現象。例如當 X 代表丟錢幣的隨機遊戲的現象時，X 有 1／2 的機會是“正”和 1／2 的機會是“負”。又如 X 代表擲一個骰子時，X 取值爲 1、2、3、4、5 或 6 的機會各爲 1／6。如果 X 所可能出現的值皆爲實數時，我們稱 X 爲一隨機變數。這時我們以 $P(a < X < b)$ 代表 X 出現在 (a, b) 的機率，以 $P(X = a)$ 代表 $X = a$ 的機率。如果有非負的函數 f 使得對任意的 $a < b$，

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

都成立。我們就稱 f 是 X 的機率密度函數。

1.帕斯卡（Pascal，1623～1662）與費馬（Fermat，1601～1665）：在十七世紀時，賭博在法國很是流行。有位騎士兼賭徒叫第美雷（De Méré），他在一個場合裏問帕斯卡如下的機率問題：甲乙玩一遊戲，甲連續擲一個骰子 4 次。若有一次出現 6 則甲贏，否則乙贏。他請帕斯卡幫他算算甲贏的機率。帕斯卡計算的結果是

$$\text{甲贏的機率} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}\text{。}$$

從此帕斯卡常和另一數學家費馬通信討論機率問題。其中有一個簡單的分產問題：甲乙共有64元，今甲乙猜拳，先勝三次者可得全部之錢。假設甲已勝兩次，乙一次，而必須停止比賽。問他們應該怎樣來分 64 元？

以下是帕斯卡的算法：如果再比一次，甲贏了可得64元，輸了（甲乙各勝兩次）可得 32 元。因此甲應得

$$\text{甲得} = 32 + \frac{1}{2}(64 - 32) = 48\text{ 元，}$$

$$\text{乙得} = 16\text{ 元。}$$

用相同的推理可得下列問題之解。

(a)若甲已贏兩次，乙零次，則

$$\text{甲得} = 48 + \frac{1}{2}(64 - 48) = 56\text{ 元，}$$

$$\text{乙得} = 8\text{ 元。}$$

(b)若甲已贏一次，乙零次，則

$$\text{甲得} = 32 + \frac{1}{2}(56 - 32) = 44\text{ 元，}$$

$$\text{乙得} = 20\text{ 元。}$$

費馬也用不同的方法得到相同的答案。經他們再研究的結果，通解是：如果甲需再贏 m 次，乙 n 次，則甲乙分錢之比應爲

$$(1.1)\quad C_0^{m+n-1} + \cdots + C_{n-1}^{m+n-1} : C_0^{m+n-1} + \cdots + C_{m-1}^{m+n-1}\text{。}$$

在上面的原問題中，$m = 1$，$n = 2$，因此甲乙所得之比爲 3：1 = 48：16。在(a)中，$m = 1$，$n = 3$，甲乙所得之比爲 7：1 = 56：8。在(b)中，$m = 2$，$n = 3$，甲乙所得之比爲 11：5 = 44：20。

請諸位讀者詳細看看上面的公式（1.1）。它解釋了什麼？在上一節中，帕西歐里的答案對嗎？

2.非根式（Huygens，1629～1695，荷蘭人）：非根式於 1655 年去巴黎，由友人處得知帕斯卡和費馬討論的問題。引起了他對機率的興趣與研究，並且寫了一本書。這本書後來對伯努力產生很大的影響。在書中他首先提到簡單期望值（平均值）的概念。例如某遊戲有 p 種

出現可得 a 元，有 q 種出現可得 b 元。假設每種的機率相等，則此種遊戲的期望值為（$pa+qb$）／（$p+q$）。

3.傑姆斯·伯努力（James Jacques Bernoulli，1654～1705，瑞士人）：傑姆斯受到非根式的書的影響，在機率上下功夫研究。他廣泛的把多項式展開時的係數們與排列組合的關係應用到機率上。他常做一種成功的機率為 p 的隨機試驗，令 $X=1$ 代表成功而 $X=0$ 代表失敗。則 X 為一隨機變數，而且 $P(X=1)=p$，$P(X=0)=1-p$。後人稱此隨機變數為伯努力隨機變數。

他證明了以下結果：重複做一隨機試驗，成功的機率為 p。令 $m(n)$ 代表 n 次試驗中成功的次數，則對任意的正數 ε，恆有

$$(3.1)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m(n)}{n}-p\right| \leqq \varepsilon\right)=1。$$

沒受過深一點的數學訓練的人，大都對(3.1)沒有概念。讓我們用另外一種看法來解釋它：令正數 ε 為能容忍的誤差，則當 n 很大時，$\frac{m(n)}{n}-p$ 在誤差範圍 ε 之內的機率很接近於1。也就是說在誤差範圍 ε 之外的很小。這是最原始的極限定理（稱為大數法則）。在以後的機率研究中，各種極限定理成為重要的研究重心。

傑姆斯著有一本書叫「猜測術」。在他死後由姪兒尼克拉（Nicholas Bernoulli）於1713年出版。是一本很有名的書，影響後代機率學家甚深。

傑姆斯是第一個使用微分方程來討論問題，解決問題的人。對科學的進步很有貢獻。同時他也是第一個提出並且解決「最短時間」的變分學問題的人。變分學是一種求極值的學問，廣泛的被應用在物理、工程和經濟學上。

4.孟特莫（Montmort，1678～1719）：微積分在英國及德國的出現，引起了到底是牛頓還是賴比尼茲首先發明的爭執。歐洲數學家們組成一個委員會來調查，孟特莫是調查委員之一。調查結果是當時解析幾何已經有高度發展，微積分的出現時機成熟。兩人分別獨立得出微積分，沒有抄襲之嫌。

孟特莫除了把機率應用到社會科學外，他和尼克拉·伯努力及將·伯努力（傑姆斯之幼弟）討論如下問題：甲乙玩一隨機遊戲 X，乙事先給甲若干元，然後連續丟一錢幣直到第一次出現「正面」為止。如果乙丟了 n 次才出現正面，甲給乙 2^n（$=X$ 之值）元。問乙應在事先給甲多少元才會使這種比賽公平？大家都知道在第 n 次才出現正面的機率是 $\frac{1}{2^n}$。因此 X 的平均值是

$$EX=\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n}=\infty 。$$

也就是說乙應該先給甲∞元。但是乙丟錢幣時，總有一次會出現正面的，所以乙拿回來的錢一定有限！這怎麼會公平呢？不是很矛盾嗎？

丹尼爾·伯努力（Daniel Bernoulli，1700～1782，傑姆斯的另一個姪兒）把這問題發表在聖彼得堡（今列寧格勒）科學院。後人稱此問題為聖彼得堡詭論。諸位讀者有什麼意見嗎？

我們只能這樣解釋？令乙事先給甲 Y 元。若 $Y<\infty$，則對乙有利。若 $Y=\infty$，則對乙不利。這個遊戲是無法公平的。

順便一提丹尼爾，他常把機率用在社會科學上。十八世紀時，天花仍無法控制。但是免疫疫苗已經被研究出，只是尚未十分完美。在是否應該注射疫苗時，引起了大爭論。丹尼爾作了一些觀察，發現沒有注射疫苗的人得天花的機率比注射疫苗的人大得多。因此他極力主張注射疫苗。

5.地穈佛（De Moivre，1667～1754）：讀

者對地穊佛應該熟悉。他就是寫出

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

的數學家，他在宗教壓力下，從法國逃到英國去做難民。雖然牛頓很欣賞他的才華，却也無法替他在劍橋大學找一教職。後來他在一家咖啡館中替賭徒們計算機率或替人計算養老金等而得些報酬以維持生活。在牛頓晚年，如有人去請教他數學問題，牛頓就會介紹他們去請教地穊佛。

非根式曾經提出以下問題：甲有 a 元，乙有 b 元。兩人玩一遊戲，甲贏的機率為 p，乙贏的機率為 $q=(1-p)$。甲贏的話，乙給甲一元，反之甲給乙一元。如此反覆繼續，直到有一人輸光為止。問甲乙輸光的機率各為何？這個問題今稱為「持久問題」或「破產問題」。地穊佛用差分的方法得到的答案是：

$$\text{甲輸光的機率}=P_B$$

$$=\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^a-1\right\}\Big/\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-1\right\},$$

$$\text{乙輸光的機率}=P_A=1-P_B\text{。}$$

如果令 N 為甲或乙輸光為止所需的次數，則 N 的期望值為

$$EN=(bP_B-aP_A)/(p-q)\text{。}$$

地穊佛在極限定理有一個重要貢獻。重覆做一機率試驗，成功的機率為 $\frac{1}{2}$。令 $m(n)$ 表 n 次試驗中成功的次數。他研究 $m(n)-\frac{n}{2}$ 的離差問題。後來他證明了

$$(5.1)\quad \lim_{n\to\infty}P\left\{z_1<\frac{m(n)-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}/2}<z_2\right\}$$

$$=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\text{。}$$

這是繼伯努力後的另一個極限定理（稱為中央極限定理）。地穊佛是第一個引用常態密度函數（又稱高斯密度函數）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的人。這個密度函數是機率學中最重要的密度函數。

6.白衣士（Bayes，1702～1761，英國人）：白衣士首先介紹條件機率的概念。他稱

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

為已知事件 A 中之事件 B 的條件機率。今令 A_1，……，A_n 為互斥事件而 $B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$。若 $P(A_i)$，$P_{A_i}(B)$，$1\le i\le n$，皆已知。可否以此資料而求出 $P_B(A_k)$？答案是肯定的，而且

$$P_B(A_k)=\frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(B)}\text{。}$$

大數學家拉普拉斯稱此為白衣士公式。這公式在統計學上常用到。

7.歐以樂（Euler，1707～1783，瑞士人）：歐以樂在數學上貢獻良多，對機率的貢獻則較遲。在趨近十八世紀中葉時，機率學逐漸的更被廣泛的應用在人口學、保險學、誤差的處理及彩券（類似愛國獎券）的發行等。當時各國風行彩券，政府就利用它來充實國庫。歐以樂是在替普魯士菲德烈大帝計算彩券的獎額時，才開始研究機率學。以下是個有名的問題：甲乙各有一桶註有從 1 到 n 的號碼的球。甲乙各從自己的桶內同時一次次的取出一個球（不再放回）。如果有一次，甲乙取出的球碼相同則甲贏。如果甲乙每次取出的球碼都不同則乙贏。問甲贏的機會多少？這個問題今稱為「秘書問題」。歐以樂算出。當 $n\to\infty$ 時，甲贏的機率是 $1-e^{-1}$，而乙贏的機率是 e^{-1}。

8.甫風（Buffon，1707～1788）：甫風是天

文學家，他把機率學用在太陽系的解說上。他說太陽系的六個行星（當然僅知地球、火、水、木、金及土星六行星）繞太陽旋轉的方向都相同。又六個行星中的任兩個行星所座落的平面的夾角不超過 $7.5^\circ=\frac{180^\circ}{24}$。其他四個行星所座落的平面與第一個平面的交角也不超過 7.5°。他說如果這六個行星沒有共同的成因，則有相同旋轉的機率是 $(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$ 而夾角不超出 7.5° 的機率是 $(\frac{1}{24})^5=1/7692624$。這種機會太小了，因此六行星有共同的成因。

甫風也提出一個有趣的問題：一平面上畫滿距離為 a 的平行線。今有一針長 ℓ（$<a$）掉在平面上。問針與平行線相交的機率為何？令 θ 為針與平行線之交角。則針與平行線相交（條件）機率為 $\ell\sin\theta/a$。故針與平行線相交的機率為

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ell\sin\theta/a\,d\theta=\frac{2\ell}{\pi a}。$$

9.達南伯（D'Alembert，1717～1783）：數學家達南伯曾考慮如下問題：擲一錢幣兩次，問至少出現一次正面的機率是多少？諸位讀者都知道答案是 $3/4$。但是達南伯說，如果丟第一次即為正面，就不必丟第二次。如果第一次是反面，才有必要丟第二次。因此一共有三種可能的出現，用符號表示的話為＋、－＋、－－。因此答案應該是 $2/3$。他的錯誤在那裏？他把以上的每一事件的機率都看成相同，才會得到 $2/3$ 的答案。這個例子告訴諸位說，連有名的數學家在討論機率時，也可能犯錯。

10.拉普拉斯（Laplace，1749～1827）：拉普拉斯在法國大革命以後的政治立場是屬保皇派而反對共和政府，為很多人所不齒。但是他在數學上貢獻很多，地位重要。以他為名的有「拉普拉斯變換」、「拉普拉斯（微分）算子」等。這些在數學、物理和工程上有很重要的應用。在機率學上，他首先引用了「動距母函數」（moment generating function）。令 X 為一取自然數值的隨機變數，則稱

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X=n)\,t^n$$

為 X 的動距母函數。凡乎所有的與 X 有關的資料都可由 $f(t)$ 求出。例如 X 的平均值可如下算出：

$$EX=\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]_{t=1}=\sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)。$$

拉普拉斯也推廣了地糠佛的極限定理 (5.1)：假設每次試驗的成功機率為 p，$0<p<1$，則

$$(10.1)\qquad \lim_{n\ \infty}P\left(z_1<\frac{m(n)-np}{\sqrt{np(1-p)}}<z_2\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\quad。$$

後人稱此定理為地糠佛—拉普拉斯定理。著名數學家邦戛雷（Poincaré）把具有下列分佈

$$(10.2)\quad P(a<X<b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

的隨機變數 X 稱為標準常態隨機變數。而 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 則為標準常態密度函數。(10.2) 的分佈稱為常態分佈或法則。但是後來高斯（Gauss）發現這分佈也是誤差的分佈法則。數學家為了紀念高斯在誤差方面的研究與貢獻，也稱 (10.2) 為高斯分佈，X 為高斯隨機變數。

令 P_{mn} 代表 n 次重複試驗中 m 次成功的機

率。大家所熟悉的公式 $P_{mn}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ 是傑姆斯・伯努力首先導出來的，但是 n 很大時，很難算此值。拉普拉斯證出

$$(10.3)\quad P_{mn}\doteq\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}}。$$

這樣就容易求出當 n 很大時，P_{mn} 的近似值。讀者應注意到當 p 很接近於 0 或 1 時，這個近似值是有問題的。

11.高斯（Gauss，1777～1855，德國人）：天文學家兼數學家。本文已經提過，在觀測天體行星或在同一情況下做同一實驗時，結果都不會一樣，也就是說有誤差的存在。科學家希望能消除誤差，或者至少要知道如何來處理它。在十八世紀初期這是一個很重要的問題。由於常要作天體及地球的觀測，高斯經常被誤差困擾而展開對誤差的研究。終於導出了誤差函數：如果令 X 代表誤差，則誤差的分佈是

$$P(|X|<t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-t}^t e^{-x^2}\,dx。$$

也就是說誤差的分佈是常態分佈。後人又稱常態分佈爲高斯分佈。

12.玻阿宋（Poisson，1781～1840）：玻阿宋是拉普拉斯的學生。在複變函數論中，玻阿宋核和玻阿宋積分就是紀念他而命名的。

在機率學中，玻阿宋也有許多貢獻。他考慮 n 個獨立試驗，第 k 個試驗的成功機率爲 p_k。令 $m(n)$ 和以前定義一樣，爲 n 次試驗中成功的次數。則對於任意的 $\varepsilon>0$，他證出

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m(n)}{n}-\frac{\sum_{k=1}^n p_k}{n}\right|\leqslant\varepsilon\right)=1。$$

玻阿宋稱此爲大數法則。當 $p_k\equiv p$ 時，此即爲伯努力定理 (3.1)。

在考慮成功的機率爲 p 的重複試驗中。當 p 很接近於 0 或 1 時，拉普拉斯給的 P_{mn} 的近似值 (10.3) 不準確。玻阿宋考慮 $t=\lambda/n$，再令 $n\to\infty$，算出極限值

$$P_m=\lim_{\substack{n\to\infty\\ np=\lambda}}P_{mn}$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ np=\lambda}}\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}。$$

玻阿宋稱此爲小數法則。後人稱有如下分佈：

$$(12.1)\qquad P(X=m)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\quad,\quad m\geqslant 0$$

的離散型隨機變數 X 爲：以 λ 爲參數的玻阿宋隨機變數。而稱 (12.1) 之分佈爲以 λ 爲參數的玻阿宋分佈。玻阿宋分佈是最重要的離散型分佈。每小時進醫院的人數，每天打電話的次數，每月發生車禍的次數，每年用的燈泡的個數等都是採用（不同參數的）玻阿宋分佈的。

四、重心的東移

到十九世紀中期，雖然機率學已經有高度的發展與應用。但是在研究機率時，大都是利用觀察、試驗與簡單的數學計算。加上由於每個人的觀點不同與邏輯立場的互異，常有爭執發生。D'Alembert 的問題就是一個例子。有人把機率學看成是占星學或是冶金術。使機率學喪失了對數學家的吸引力。以後數拾年間，雖然機率的應用愈來愈多、愈廣，在理論上却沒什麼重大發展！但是這時，機率學却在俄國默默的茁壯與成長，開花且結果。使俄國人在機率學方面居於領先地位。機率學的重心遂由法國轉移至俄國。

俄國人在十九世紀三零年代後才開始重視

機率學。在數學家邦雅克夫斯基(Bunyakovskii ,1804～1889)及歐斯錯格拉斯基(Ostrogradskii ,1811～1862)的努力下,機率學開始在俄國發芽與生根。出了幾名很著名的機率學家。

1.切比些夫(Chebyshev ,1821～1894):1846年在莫斯科大學得數學碩士學位。他在機率學上貢獻很多。他導出了不等式:若$\varepsilon>0$,則

$$(1.1)\qquad P(|X-EX|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{E(X-EX)^2}{\varepsilon^2}$$

後人稱(1.1)為切比些夫不等式。這是一個很有用的不等式。例如我們令$\{X_n\}$為獨立隨機變數序列,對所有的$i\geqslant 1$,滿足$E(X_i-EX_i)^2\leqslant c$。則對任意的$\varepsilon>0$,可由不等式(1.1)得到

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i\right)\right|\leqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{nc}{n^2\varepsilon^2}=\frac{c}{n\varepsilon^2}\ 。$$

因此得

$$(1.2)\qquad \lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i\right)\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0\ 。$$

伯努力和玻阿宋的極限定理,都是(1.2)的特殊情形。

切比些夫也花了很多時間在研究如何由各階動距(Moment)來決定機率分佈的問題。另外他也研究如何來推廣地穈佛和拉普拉斯的極限定理。為什麼要研究這個問題呢?原因是在自然界中,有很多隨機現象是由大量的獨立無關之小緣由所促成。每一個小緣由的影響是非常的小,而其機率分佈通常是不可知的。由於小緣由的數量大,機率學家就可用和的極限來代替原來的自然隨機現象。機率學家希望知道在那些條件之下,和的極限會存在,以及極限的分佈是什麼?這一方面的定理後來被匈牙利的著名數學家波利亞(Polya)稱為中央極限定理。目前還有很多人做這方面的研究。

2.馬可夫(Markov ,1856～1922):馬可夫是切比些夫最得意的學生之一。他成功的用動距的方法,嚴格的導出一些中央極限定理。他也改良了切比些夫不等式而得

$$P\{|X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{E|X|^{\lambda}}{\varepsilon^{\lambda}}$$

其中λ,ε皆為正數。$\lambda=2$時,即為切比些夫不等式。

馬可夫最著名的貢獻是他研究如下的隨機變數序列$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:在已知X_1,……,X_n之值後,X_{n+1}的機率分佈只與X_n之值有關而與X_1,……,X_{n-1}之值無關。以前所提到的「持久問題(破產問題)」,就是一種例子。後人稱這種隨機變數序列為馬可夫鏈(Markov chain)。馬可夫鏈有很廣泛的應用。目前有位華僑數學家鍾開萊,在馬可夫鏈上有極深的研究與貢獻。在這方面可執牛耳!

在1913年,馬可夫替伯努力召開了一個慶祝會:伯努力的「大數法則」及他的書「猜測術」出世的兩百年紀念。

3.里阿破諾夫(Liaponov ,1857～1918):里阿破諾夫是切比些夫的另一個得意門生。拉普拉斯首先引用了動距母函數,但是如果一個隨機變數的值域不包含在自然數中,則動距母函數的定義會發生困難或根本不能定義。里阿破諾夫引用了隨機變數X的特徵函數

$$\varphi_X(t)=E(e^{itX})\ ,\qquad t\in R\ 。$$

每個隨機變數的特徵函數都存在。而且隨機變數的分佈函數和特徵函數是互相唯一決定的。里阿破諾夫利用特徵函數的特性來證明極限定理。在極限定理上有重要的貢獻。

里阿破諾夫在微分方程和力學上也很有成就。正當他的學術成就與名望在登峰造極時,他的妻子却因肺結核病而亡,在悲傷之餘,他

跟隨殉情。一位大數學家就如此的結束了一生。

五、其他的貢獻

英國植物學家布朗（Brown）在1827年時，由顯微鏡發現微小的粒子在溶液中會做一種極不規則的運動，後人稱此為布朗運動。在中國的老式房子，窗子小而屋內陰暗，一旦太陽光由天窗射入，就形成一束光柱。在這束光柱內可看到很多的浮塵在飄動，他們也是在做布朗運動。為什麼會有布朗運動呢？物理學家說這是因為微粒子受到四面八方的分子的撞擊而產生的運動。一滴墨水掉在水中會散開的原因也是墨水中成千上萬的粒子在水中作布朗運動的結果。

物理學家們，包括愛恩斯旦（Einstein）、施莫洛扣斯基（Smoluchowski）等，曾試圖建立布朗運動的數學模型以便詳細研究，只是沒有成功。邦戛雷的學生巴雪利爾（Bachelier）在1900年時，發表了一篇有關股票市場波動的論文，其結果就如（一維的）布朗運動。一直到1923年，布朗運動的數學模型才由美國的猶太數學家烏因納（Wiener）首先完成。因此後人也把布朗運動稱為烏因納過程（Wiener process）。

什麼是「過程」？它是機率學的術語。令 $T=[a,b]$，如果對每個 $t\in T$，X_t 為一隨機變數，則集合 $\{X_t\}_{t\in T}$ 稱為一隨機過程。也就是說，隨機過程是指一種隨著時間變化而不同的隨機變數族。烏因納過程就是一種隨機過程。今天它無論是在理論上或是應用上，都有很重要的地位。由於烏因納所發表的文章雜亂難讀，在當時並沒有得到大回響。一直到1930年，再寫一篇有關布朗運動的論文後，才廣受重視。

物理學家愛連菲世特（Ehrenfest）用一種馬可夫鏈來解釋氣體或熱的對流問題：設有 N 個有號碼的球分置於甲乙兩甕中。某人做一試驗，由1至 N 中任取一數。若抽出之數為 k，則將 k 號球取出放入另一甕中。如此反覆繼續，問當做了很大量的試驗後，甲乙兩甕球數之比如何？讀者們應可想到含有較多球的甕有較大的機會被拿出一球到另一甕去！因此做了大量的試驗以後，可以證出甲乙兩甕的球數比有很大的機率接近於1。這是解釋氣流或熱流的一種數學模型。第一位諾貝爾經濟獎的得主聽柏根（Timbergen）即為愛連菲世特的學生。他的另一位學生的學生庫普曼（Koopmans）後來也得到諾貝爾經濟獎。其他把機率學應用到物理上的尚有波茲曼（Boltzman）、吉甫（Gibbs）、馬克斯威爾（Maxwell）、雷禮（Rayleigh）等多人。

航海事業在北歐相當發達，保險業也因此發達。龍柏格（Lunberg）在1903年發表一篇論文。內容研究保險公司在「隨機的時間（災難發生時間）付出隨機的賠償額」以及「賠償總額的隨機過程」的理論。在1909年，俄連（Enlang）在研究電話通路問題時，提出了玻阿宋過程（Poisson process）。同年雷澤福（Rutherford）及蓋格（Geiger）在研究放射性物質的放射性如何衰退時，也用上了玻阿宋過程。其實玻阿宋過程是龍柏格所研究的「賠償總額」隨機過程的一種特別情形（當賠償額固定時）。

在十九世紀下葉，給爾頓（Galton）發覺英國望族的姓氏逐漸消失或減少。他和娃森（Watson）共同研究這個問題的數學模型。因為每人有子，子有孫，如此繼續，就像樹木分枝。所以這個問題的數學模型被稱為分枝過程。生物學家用它來研究細菌的繁衍。物理學家用它來研究核分裂的連鎖反應。今天世界上有些土地小的國家，把核分裂的連鎖反應的數學模型拿到很大的電子計算機上去做模擬試爆，看看是否能在短時間內得到巨大的能量而產生核爆。因此就不必做實地的原子彈試爆了。

雖然以色列的土地小，從沒做過原子彈的試爆工作，但是很多科學家們相信以色列擁有原子彈。

六、新的需要

早期的機率都是假設機會均等。例如丟錢幣時，假設正反面的機率各爲 1／2 。擲骰子時，假設每面出現的機率各爲 1／6 。抽樸克牌時，每張被抽出的機率爲 1／52 。這些均等機會的觀念在一些簡單的隨機試驗是對的。但是無法廣泛的應用到其他的隨機現象去。前文中提到達南伯所犯的錯，就是誤用了均等機率。數學家對於機率在廿世紀前仍沒有很清晰的概念。要求嚴謹的機率定義的壓力與呼聲漸多。其中以白特朗（ Bertrand ）力爭最甚。他曾提出以下一問題：在一圓內「隨意」畫一弦。問此弦長大於圓內接正三角形之邊長的機率爲何？請諸位算算看答案！

(a)如果先在圓內取一點作爲弦的中點再畫弦，機率是 1／4 。

(b)從圓周上畫弦，機率是 1／3 。

(c)在通過圓心的直線上取一點作爲弦的中點再畫弦，機率是 1／2 。

後人稱此問題爲白特朗詭論。到底是那一個答案才是正確的？我們只能說白特朗問得不夠清楚。那「隨意」兩字是矛盾根源。

白特朗另外還提出一個問題：有三個相同的火柴盒，每個內盒兩邊對稱分別隔開。第一盒兩端各放金幣一個，第二盒一端放一金幣，另一端放一銀幣，第三盒兩端各放一銀幣。今任取一盒，發現一端爲金幣。問另一端爲銀幣的機率爲何？白特朗的答案是 1／2 。請諸位讀者也算一算看，答案是否也是 1／2 。正確的答案是 1／3 ，因爲所見到的金幣可能是第二盒的一端，也可能是第一盒二端的任一端，因此答案是 1／3 。

由於詭論的提出，直觀機率所產生的紛解的爭執等，促使人們了解到有必要把機率概念嚴謹化。大數學家兼物理學家邦戛雷（ Poincaré，1854～1912 ）在廿世紀初就用較嚴謹的方法寫了一本機率的書。加上十九世紀末期以後，數學已經漸漸的走向公理化，用此機率學也逐漸的走向公理化。

註：早期的數學大都源於某方面的應用，它的理論比較局部，比較狹小，比較實用。但是後來發現它們都可作較廣義，較抽象的推廣，可作較有系統的研究。所謂的公理化的數學是指在討論數學上的某一體系X時，假設X滿足某些公理，那麼X就有一種稱呼（定義）。利用X所滿足的公理，可研究體系X的理論及其應用。例如在空間R^n上的任意兩點x，y都有距離$d(x,y)=[\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2]^{1/2}$。距離的最重要性質是

(1)$d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$，

(2)$d(x,y)=d(y,x)$，

(3)$d(x,y)\leqslant d(x,y)+d(z,y)$。

我們可以把距離的概念推廣到任何集合上去。令S爲任一集合，對應於S中的任二點x、v，$d(x,y)$爲一實數。如果d滿足條件(1)、(2)、(3)，則稱d爲S上的一種距離。也就是說，把條件(1)、(2)、(3)看成是距離的公理。例如令S爲區間$[a,b]$上的所有的連續函數的集合。若f，$g\in S$，令

$$d(f,g)=max\{|f(t)-g(t)|:\ a\leq t\leq b\}。$$

則d滿足(1)、(2)、(3)，因此d是S上的一種距離。這種距離在今天的數學中是極爲重要的距離之一。

德國科學家黃米斯（ Von Mise，1883～1953）提出了頻率機率的看法。他給了兩個公理：

(4)重複的對一事件A作試驗，令$m(n)$代表n次試驗中，事件A成功的次數。則頻率$m(n)/n$會收斂到一個數p。

(5)在試驗序列中，若只接受某些試驗子序列（

這些子序列的取捨要滿足某些條件），其結果與(4)同。

然後才定義$P(A)=p$。後來發現這種定義行不通。雖然$\lim_{n\to\infty} m(n)/n=p$是有意義的，但是實際上是不可能做∞次的試驗的。只有統計學家或能接受這種定義。

到廿世紀初期，有關機率方面的研究已經很多，有的用排列組合來討論離散型的隨機變數，有的用微積分來討論連續型的隨機變數，有的研究特徵函數與分佈法則的關係及其在極限定理上的應用，有的研究機率學在各方面的應用等，只是都很散亂，沒有統一的基礎理論來做為他們的基石。法國機率學家雷夫依（Lévy）這時開始企圖用嚴格的數學方法，把各方面的機率學術融成一塊。在以後的數十年中，雷夫依在機率學方面有很多的貢獻，成為著名的機率學家之一。

七、大突破

在十九世紀末期，數學家有一個問題：每個實數R上的區間，都可測度其長。一個集合若是可數個區間的聯集，也可以測度其長。今問是否每個R的子集都可測度（其長）？這樣子就促進了測度論的研究與發展。有了測度之後，數學家就開始研究函數的積分。雷貝格（Lebesgue）在本世紀初完成了積分的理論。在今天雷貝格的積分理論是每個數學高年級生所必修的課程之一。雖然測度論的發展動機與與機率學無關，他們的結果却是機率學的最重要的基石。

測度論的先驅之一，玻雷爾（Borel），在1909年時已經解說測度理論可以當機率學的基石。隆尼基（Lomnicki）在1923年也寫了一篇文章以測度論解說機率論。烏因納更是用測度的理論造出布朗運動的數學模型。但一直等到1933年，才由科莫格洛夫（Kolmogorov）寫了一本書叫「機率學基礎」。在書中，科莫格洛夫利用測度理論，完美無缺的來公理化機率空間和解釋隨機變數、期望值以及其他機率學的理論。數學家和機率學家們才清楚原來機率學就是一種測度的理論。如果說在本世紀二零年代以前，機率學不是數學。大概沒有什麼不對，至少它不是很有公理化、嚴密的學問。但是如果有人在1933年後說，機率學不是數學，那個人大概是白癡一個。

現在簡單的來介紹一下機率空間：令Ω為所有的樣本點的集合，$\mathfrak{F}$為滿足下列條件的Ω的子集族；

(1)$\phi\in\mathfrak{F}$，$\Omega\in\mathfrak{F}$，

(2)$F\in\mathfrak{F}\Rightarrow F^c=\Omega-F\in\mathfrak{F}$，

(3)$\{F_n\}\subset\mathfrak{F}\Rightarrow\bigcup_n F_n\in\mathfrak{F}$，

假如P為從$\mathfrak{F}$到$[0,1]$的函數，並滿足

(4)$P(\phi)=0$，$P(\Omega)=1$，

(5)若$\{F_n\}$的元素互不相交，則$P(\bigcup_n F_n)=\sum_n P(F_n)$。

則我們稱$(\Omega,\mathfrak{F},P)$為一機率空間，P為機率測度，$\mathfrak{F}$為事件族而Ω為樣本空間。

如果X為從Ω到R的函數，並且滿足：對任意的$x\in R$，$\{\omega\in\Omega : X(\omega)\leqslant x\}\in\mathfrak{F}$。則我們稱$X$為一隨機變數。隨機變數的期望值就是它對$P$在$\Omega$上的雷貝格積分。由於它較難解釋，本文恕不介紹。

自從有了測度論作為基礎後，機率論的發展一日千里。除了測度論外，很多其他的數學理論都可用在機率論上，而機率本身的理論也可去革新其他的數學。最重要的是在解說大自然的很多現象時，機率學可作最直接，廣泛與有效的應用。

八、科莫格洛夫的貢獻

在機率史上，貢獻最大的是科莫格洛夫。他生於1903年，至今仍健在。1920年他進入莫斯科大學，1922年開始發表數學論文（與富利爾係數有關）。他的第一篇機率論文是於

九、結 語

1924年和茵親（Khinchin）合寫的著名的三級數定理。以後著名的機率方面論文有零一法則、科莫格洛夫不等式、強大數法則的充要條件、重複對數法則、機率論的解析方法、一致定理等。不僅論文本身重要，他所用的方法也很重要。很多人模仿他的方法去解決很多其它的問題。

他首先研究了馬可夫過程，什麼是馬可夫過程？簡單的說，它是一種隨機過程 $\{X_t\}$，對任意的時間 t_0，t_0以後的發展與$X(t_0)$有關，而與t_0以前的資料無關。幾乎所有的大自然的隨機現象都是馬可夫過程。他也得出馬可夫過程與二階微分方程的親密關係。他在馬可夫鏈和馬可夫過程方面的研究，使得物理學家、生物學家、化學家和工程師們清楚的了解到機率學在自然科學裡的重要。在今天，何止是自然科學，機率學在社會科學裡一樣有很重要的應用。

科莫格洛夫才華橫溢，他研究的範圍非常廣，除了機率學，他在三角級數、測度論、集合論、積分論、邏輯學、拓撲學、逼近論、訊息論、數理統計、動力學、方法論、天體力學、微分方程、彈道學、亂流論等等都有貢獻。他最了不起的地方是他在作各方面的研究時，他得用各方面不同的創造性技巧來解決問題。這不是常人能做到的。

筆者在1970年的某一個機緣裡，與一位猶太數學家談天。筆者請問他誰是最偉大的數學家？雖然猶太人不喜歡俄國人，但是他的回答是「科莫格洛夫」。

自從科莫格洛夫出了「機率學基礎」的書以後，機率學被公理化、系統化、嚴謹化。以後和各種數學結合，作多方向的發展，進步神速。由於牽涉到較深的概念以及太多方面的發展，筆者認為不適宜介紹給一般讀者。機率史的簡介到此告一段落。對 1933 年以後的機率史有興趣的讀者，可參見：Cramér ，H.，Half a century with Probability theory，*The Annals of Probability*，1976，Vol. 4，509～546。

今天世界各進步國家，對機率學的研究，莫不遺力。俄國在科莫格洛夫、茵親及伯恩斯坦（Bernstein）及他們的門生的努力下，已儼然成為機率學的領導重心。美國則在烏因納、杜甫（Doob）及飛樂（Feller）領導之下，也成為重心之一。法國原是機率學的發展重心，在雷夫依領導之下，希望重建昔日雄風。雷夫依死後，法國在年輕的梅耶爾（Meyer）領導下，率領西歐新秀，也形成一股勢力。附帶一提：梅耶爾淡薄名利，雖被選為國家科學院院士，却拒絕接受！在東方，日本人伊藤清及他的門生們也在埋頭努力，希望和歐美並駕其驅。

在楊振寧得諾貝爾獎後不久，有人問他如果讓他重新選擇科系，他會選那一行。楊振寧說他會選擇生物學，其次就是機率學。可見得機率學對他是有多麼大的吸引力。近年有人問他，為什麼多年來物理學方面的重大問題都無法解決？他說大概是某種強有力的數學理論尚未出現吧！十幾年來，有些物理學家相信宇宙中有黑洞的存在，只是無法證實！年青華人數學家丘成桐利用微分幾何的理論證明空間的奇異點的存在，在物理學上的解釋就等於說黑洞的存在。加州大學一羣天文物理學家在今年六月份的「科學」雜誌上稱，他們已探測到在距離地球三千光年的銀河系中心有大量的物資存在，這就是黑洞所在地。

現代很多人都希望用機率學和無窮維空間的數學來描述，解釋和研究大自然現象！比較簡單的已經沒問題。但是困難的地方仍然很多！就如楊振寧所說，要等某些強有力的數學理論出現才能解決！筆者在這裏勉勵年青的讀者們：只要你們的聰穎能力夠的話，浩瀚的數學領域是你們將來遨遊與奮鬥的好地方！

（本文作者任教於東吳大學）