$$\geqslant \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}$$
$$=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

即 $$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$$
$$\geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$
$$\frac{3a_4+a_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$
$$a_4\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$
$$a_4^4\geqslant a_1a_2a_3a_4$$

(2.楊崑明來函)

數播編輯們好：

謝謝上次為我重述有關 $\frac{1}{2}\theta r^2$ 求max 之問題。

現在學生有個問題再請教您們。

題目 設 a_1, a_2, a_3，都不是負數，試證

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

解： 2 的乘冪大於 3 且與 3 最近的數是 $2^2=4$，令

$$a_4=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$$

因 $$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}$$
$$\frac{a_3+a_4}{2}\geqslant\sqrt{a_3a_4}$$
$$\therefore\ \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}$$
$$\geqslant\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}$$

$$a_4^3\geqslant a_1a_2a_3$$
$$a_4\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$
$$\therefore\ \frac{a^1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$ 得證。

*（學生的問題就在畫線部分，此種心路歷程如何來的，又怎怎麼可以令

$$a_4=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$$

這樣不就是 $3a_4=a_1+a_2+a_3$ 了嗎？）

又如要證明

(1)任予 5 個正數 $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\geqslant\sqrt[5]{a_1a_2\cdots a_5}$$

此題亦是利用先證偶數正數（如 $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$）成立。再利用此偶數之已知來求證。

要證(1)即用了

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_8}{8}\geqslant\sqrt[8]{a_1\cdots\cdots a_8}$$

這是“為什麼呢”??

它的一般式的證明更煩了，難道就只有這麼一個證法。（如此查遍所有參考資料似乎只有這做法）。

可以為學生做個詳細的解答嗎？（希望不會妨礙您們的研究時間。）謝謝！

數播好友 楊崑明

楊先生：

由 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 開始，證明算術平均大於幾何平均時，有一個明顯的矛盾需要解決，即如何保持每一個數的加權都相同。所謂加權的意義如下：

設 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1\quad \alpha_i\geq 0$

$a_1, a_2, \cdots a_n$ 均為正數

算術加權平均 $= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$

幾何加權平均 $= \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$

你看，如果從 $\dfrac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}$

$$\frac{\dfrac{a_1+a_2}{2}+a_3}{2} \geqslant \sqrt[4]{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3}}$$

可以看到 a_1, a_2, a_3 的加權的分配是 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，不是我們要證的結果。

現在若 $n=2^k$ 則

$$* \frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k} a_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{2^k} a_i\right)^{\frac{1}{2^k}}$$ 可以直接

證明，而且它們的加權是相同的。如果 $n \neq 2^k$ 就不能這樣證明了。這時我們可以分析，有沒有辦法利用 $n=2^k$ 的結果呢？

現設 $m \neq 2^k$，但 $m < 2^k$，對某一正整數 k 成立。現在來觀察式子 *。左邊是 a_i 的一次齊次式，右邊是 a_i 的乘積的某次方根。如果設 $b=\sum_{i=1}^{m} a_i$ 放進入加以補足。則 * 個的左右仍可安排爲 a_i 的一次齊次式，右邊是 a_i 乘積的某個有理乘冪，但是乘冪不對，係數也不對，因此證明沒有成功。這時你會想要修正。則設 $b=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$ 顯然是個很好的誘惑。因爲如果 $a_1=a_2=\cdots=a_m$ 時，等號應該成立。而設 $b=\sum_{i=1}^{m} a_i$ 時，等號就不成立了。再試一次成功。

所以雖然這是一個巧妙的方法，但是仍然有可以追尋的基礎。如果考試遇到這題，你只要有某種**填補**的印象，就可以摸索出來。

像代數、三角、微積分這類東西，寫成標準的敎科書都有兩百年的歷史（尤拉的微積分出版於 1748 年）。其中的許多巧妙的證明或精心設計的習題都是前人累積下來的成果。對一個初學者而言，面對這個璀璨的遺產，要以什麼態度去接受它呢？這個決定非常重要，也許是你學習成敗的關鍵。適當的尋根究底是應該的，但是太過與不及都不好。一個巧妙的方法也許是某一個古人在偶然之間想出來的，後來錄入敎科書中，便成了遺產的一部分。一個著名的數學家的論文或專書中往往充滿許多巧妙的技巧，適當地加以挖掘，便可以拿來讓中學生稱讚不置了。還有，也許是某個老師在敎學時得到的靈感。

因此你不能對每一個證明都問老師，爲什麼這樣證？每一個定義都問老師，爲什麼要這樣定？尤其每一個老師的際遇不同，他們的回答往往不會令你滿意。有時候，你要先吞下去再說。因爲有一天，你會突然發現，你自己會提供一個你認爲最滿意的回答。就好像你到一個陌生的城市去拜訪朋友時，你將滿意於僅知道車站到旅館，旅館到朋友家，朋友家到車站的路一樣。如果你在那城市成家立業，你自然會知道那個城市的種種。一個疑惑，尤其不是直接相關的，不是看不下去的正當理由，太多個疑惑則是。

因爲你想要一個新的證法，所以我提供一個由導函數求極值再配合數學歸納法的證明。我是從 Peter Lax的微積分書上看來的。

令 $P(n)$ 表示 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$ 成立，現在欲證 $P(n) \to P(n+1)$。

將

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

改寫成

$$\frac{1}{a_{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{n+1} \geqslant (n+1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i$$

令 $f(b)=\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i+b\right)^{n+1}$

求 $f(b)$，$0 < b < \infty$ 的極小值。

由 $f'(b) = 0$，解得 $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ 是唯一解。

因 $\lim_{b \to +\infty} f(b) = \lim_{b \to 0^+} f(b) = \infty$

故知 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ 是 $f(b)$ 極小值發生之處。

故

$$\frac{1}{a_{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{n+1}$$

$$\geqslant \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}\left(\frac{n+1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\right)^{n+1}$$

$$= (n+1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n}$$

由歸納法假設

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

代入化簡即得。

其他尚有利用函數的凸性來證的，不再多說。

朱建正　覆

(3.魏振財來函)

編輯先生：

繪畫橢圓形方法有那些？除了原始的一條線，二枚圖釘外。

讀者　魏振財

73. 10. 11.

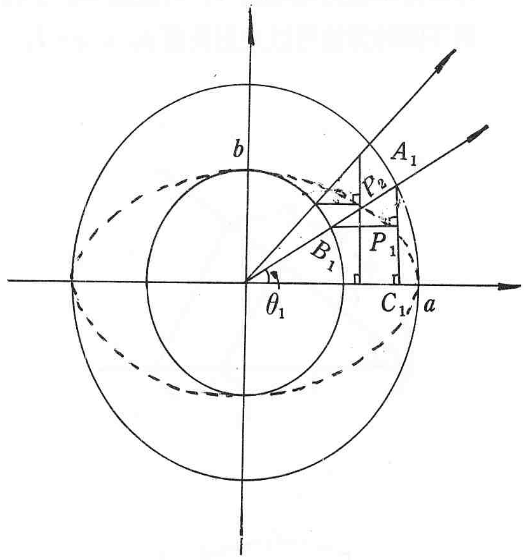
魏先生：

畫橢圓還有多種方法，以下是較基本的兩種。

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，(參數方程式 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$

假定 $a > b$

分別以 a，b 爲半徑畫圓



從圓心 O 作射線，其與 x 軸的夾角爲 θ_1，並分別交兩圓於 A_1，B_1。

從 A_1 點作 x 軸的垂線，交 x 軸於 C_1，再從 B_1 點作 $\overline{A_1C_1}$ 的垂線，交 $\overline{A_1C_1}$ 於 P_1。

則 P_1 點的坐標爲 $(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$。

重覆如上的步驟，可得 P_2，P_3，……連接這些 P_1，P_2，P_3，……即得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的橢圓。

2. 給定一常數 $e > 0$，和一定直線 d（稱爲準線）和一不在 d 上的定點 F（稱爲焦點）時，二次曲線的極坐標方程式爲