數播信箱

(1.余家富來函)

編輯先生：

您好！學生遇到一個題目：若

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$$

且

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$$

則求 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=?$

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=?$$

所引發，而自己製造出自己無法收拾的局面，特來請求幫忙。

考慮在單位圓上有 n 點

$A_1(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1)$

$A_2(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)$

....

$A_n(\cos\alpha_n, \sin\alpha_n)$

其中 $A_i\neq A_j$ 而

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cdots+\cos\alpha_n=0$$

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\cdots+\sin\alpha_n=0$$

即 $A_1A_2\cdots A_n$ 的重心爲原點

問題：

① 此 n 邊形有何特徵？

② 若去除「單對稱」，（下文解釋）所剩 m 點，若 m 爲質數，是否此 m 點構成了正 m 邊形？

③ 當 $\cos k\alpha_1+\cos k\alpha_2+\cdots+\cos k\alpha_n=0$ $(k\in z)$

$\sin k\alpha_1+\sin k\alpha_2+\cdots+\sin k\alpha_n=0$

中 k，和 n 的關係爲何？

解釋：

「單稱對」：在一圓上，若

$A(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$B(\cos\beta, \sin\beta)$

$\cos\alpha+\cos\beta=0$

且 $\sin\alpha+\sin\beta=0$

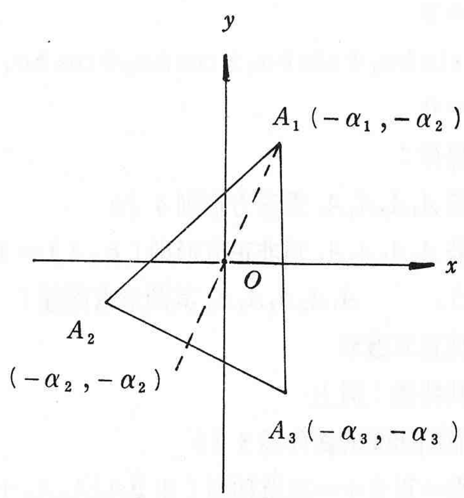
就稱 AB 爲「單稱對」，即此爲 $n=2$ 的情形。

其性質當 $\cos k\alpha+\cos k\beta=0$

$\sin k\alpha+\sin k\beta=0$

之 $(k, 2)=1$

$n=3$, $A_1(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1)$



$A_2(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)$

$A_3(\cos\alpha_3, \sin\alpha_3)$

其所構成的三邊形爲正Δ，其重心才爲原點。

特徵：一邊的中垂線，恰爲其兩面的對稱軸，而

$\cos k\alpha_1 + \cos k\alpha_2 + \cos k\alpha_3 = 0$

$\sin k\alpha_1 + \sin k\alpha_2 + \sin k\alpha_3 = 0$

的充要條件是 $(k, 3) = 1$

$n = 4$， $A_1(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1)$

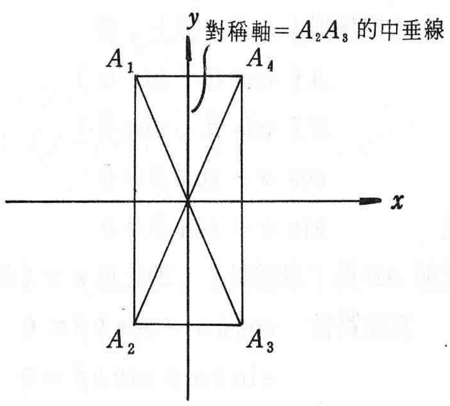
$A_2(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)$

$A_3(\cos\alpha_3, \sin\alpha_3)$

$A_4(\cos\alpha_4, \sin\alpha_4)$

其所構成的四邊形爲矩形，其重心才爲原點。（矩形恰爲兩個「單稱對」所構成，如圖 A_1A_3，A_2A_4 兩組）。

特徵：一邊的中垂線恰爲其兩面的對稱軸



而 $\cos k\alpha_1+\cos k\alpha_2+\cos k\alpha_3+\cos k\alpha_4 = 0$

$\sin k\alpha_1+\sin k\alpha_2+\cos k\alpha_3+\cos k\alpha_4 = 0$

充要條件：

①若 $A_1A_2A_3A_4$ 爲正方形則 $4 \nmid k$

②若 $A_1A_2A_3A_4$ 爲非正方形則 $(k, 4) = 1$

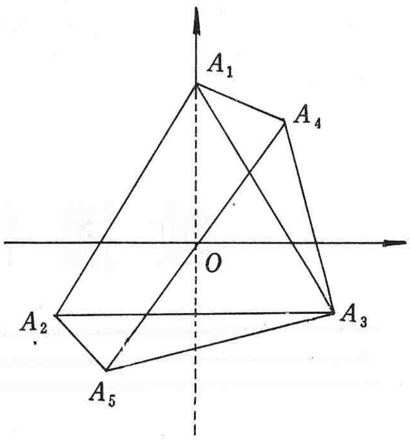
$n = 5$， $A_1A_2A_3A_4A_5$ 其圖形有兩種：

①爲正五邊形

其特徵：同上

而問題③的條件爲 $5 \nmid k$

②爲一正Δ＋一組單稱對（正 $\Delta A_1A_2A_3$ ＋



A_4A_5）

其特徵：若去除 A_4A_5 後，討論則同上。

而問題③的條件爲

$(3 \nmid k) \cap ((k, 2) = 1)$

最後還有一個問題，就是：若一圓形（重心爲原點）可分爲若干點的連加式，而這若干點的重心都是原點，可單獨討論嗎？

如 $n = 5$ 的第二情形

$A_1A_2A_3A_4A_5 = A_1A_2A_3 + A_4A_5$

其中 $A_1A_2A_3$ 和 A_4A_5 可單獨討論而經一些關係而合併嗎？

學生 余家富 敬上

74. 1. 22.

余先生：

1. n 個點 $A_i(\cos\alpha_i, \sin\alpha_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$A_i \neq A_j$ 滿足

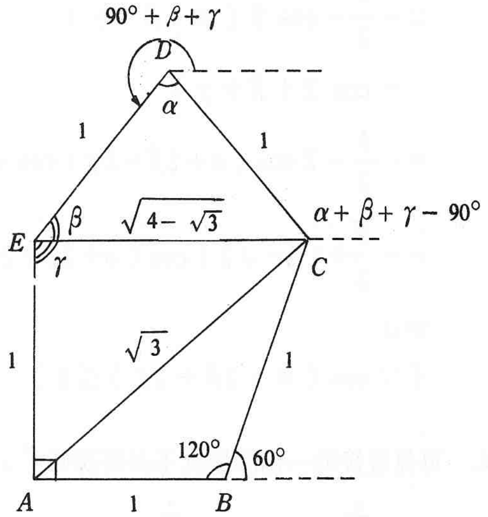
$$\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i = 0$$

因爲 cos，sin 二函數的週期均爲 2π，可約定 $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 2\pi$，可得 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 連成一內接於單位圓的凸多邊形以原點 0 爲重心，再沒有其他的一般性質。

2. n個點A_1，A_2，…，A_n 不具有一般性質，可以去除某些點，再求剩餘的點所具有的共同特性，如果n個點A_1，A_2，…，A_n 去除「單對稱」的點（每對兩個，必得偶數）所剩m點，若m爲質數，則m是3或3以上的質數，假設原問題成立的話，此m個點即爲一正m邊形的m個頂點，但是，除$m=3$外，其他的情形都不成立。譬如設計一個五邊形$ABCDE$各邊長都是1，如下：

取定α，β，γ可得

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}-2}{2},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$$



$$\sin\beta=\frac{\sqrt[4]{3}}{2},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\gamma=\frac{3\sqrt{4+\sqrt{3}}}{2\sqrt{13}}$$

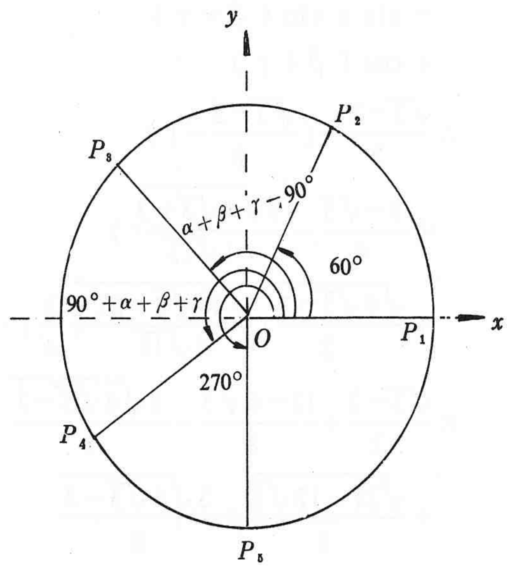
$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{16-9\sqrt{3}}}{2\sqrt{13}}$$

然後將$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EA}$係次平移到坐標系上得$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$，$\overrightarrow{OP_4}$，$\overrightarrow{OP_5}$與x軸正向的夾角分別爲0°，60°，$\alpha+\beta+\gamma-90°$，$90°+\beta+\gamma$，270°（沒有單對稱）

於是，

$$\cos 0°+\cos 60°+\cos(\alpha+\beta+\gamma-90°)+\cos(90°+\beta+\gamma)+\cos 270°$$

$$=1+\frac{1}{2}+\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin(\beta+\gamma)$$



$$=\frac{3}{2}+\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta+\gamma)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{4\sqrt{3}+3}}{4\sqrt{13}}\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{16\sqrt{3}-27}}{4\sqrt{13}}+\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{(4\sqrt{3}-3)(7-4\sqrt{3})}}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$-\frac{\sqrt{(19-8\sqrt{3})(16\sqrt{3}-27)}}{8\sqrt{13}}$$

$$+\frac{3\sqrt{3}-12}{8}$$

$$=0$$

又

$$\sin 0° + \sin 60° + \sin(\alpha+\beta+\gamma - 90°) + \sin(90° + \beta + \gamma) + \sin 270°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma) - 1$$
$$= \frac{\sqrt{3}-2}{2} - \cos\alpha\cos(\beta+\gamma) - \sin\alpha\sin(\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma)$$
$$= \frac{\sqrt{3}-2}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{4\sqrt{3}+3}}{4\sqrt{13}}\right) + \frac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}\left(\frac{\sqrt{16\sqrt{3}-27}}{4\sqrt{13}} + \frac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}-2}{2} + \frac{11-6\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{8} + \frac{\sqrt{21-12\sqrt{3}}}{8} + \frac{3\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{8}$$
$$= 0$$

3. 由 $\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \cos k\alpha_i = 0, \sum_{i=1}^{n} \sin k\alpha_i = 0,\quad k \in z$$

要找出 k 與 n 的關係，也只有 $n = 3$ 成立，其他 $n > 3$ 都不成立。譬如，上例

$$\cos 0° + \cos 60° + \cos(\alpha+\beta+\gamma - 90°) + \cos(90° + \beta + \gamma) + \cos 270° = 0$$
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}-2}{2};$$
$$\sin 0° + \sin 60° + \sin(\alpha+\beta+\gamma - 90°) + \sin(90° + \beta + \gamma) + \sin 270° = 0$$
$$\cos\beta = \frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{2}$$
$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{16-9\sqrt{3}}}{2\sqrt{13}}$$

但

$$\cos 0° + \cos 120° + \cos 2(\alpha+\beta+\gamma - 90°) + \cos 2(90° + \beta + \gamma) + \cos 540°$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \cos(2(\alpha+\beta+\gamma) - 180°) + \cos(180° + 2(\beta+\gamma)) + (-1)$$
$$= -\frac{1}{2} - \cos 2(\alpha+\beta+\gamma) - \cos 2(\beta+\gamma)$$
$$= -\frac{1}{2} - 2\cos(\alpha+2\beta+2\gamma)\cos\alpha$$
$$= -\frac{1}{2} + (2-\sqrt{3})\cos(\alpha+2\beta+2\gamma)$$
$$\neq 0$$
$$(\because \cos(\alpha+2\beta+2\gamma) \leq 1)$$

4. 可見最後的一個問題就不必再說明了。

5. 建議：$\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i = 0$ 的條件顯然不夠用，可能要加入更多的限制條件，如

$$\sum_{i=0}^{n} \cos k\alpha_i = 0, \sum_{i=1}^{n} \sin k\alpha_i = 0,\quad (k, n) = 1$$

或者由 n 次方程式之招來考慮也是一種辦法。

潘振輝 敬覆

74. 2. 27.

$$\geqslant \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}}$$

$$= \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

即 $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

$$\geqslant \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

$$\frac{3a_4 + a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

$$a_4 \geqslant \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

$$a_4^4 \geqslant a_1 a_2 a_3 a_4$$