# 管窺電腦在數學教學上的運用及其意義

何景國

電腦的發明無疑地是人類智慧的偉大結晶，它不但提昇了科學日益昌明的層次，也便利了人類社會處理日常事物，它的運用層面已日漸普及，在可預見的將來，電腦將主宰整個世界科學文明，它將走入每個家庭，進入各級學校，成爲所有學生的寵物，面對這種不可改變的事實，我們勢應妥爲綢繆，及早應運；教育當局有鑒於此乃在上年度開始於十二所高中進行電子計算機新編教材之試驗教學，並依據試教結果修訂教材。教育部即將公佈的高中課程

標準內亦將納入電腦學課程作爲高三學生一年用的選修教材。因此，在未來的歲月中，大部分接受過中等教育的人都會有“電腦素養”，能夠熟練地使用電腦，更能利用電腦來解決一些紙面作業無法運算、驗證的數學問題。茲就這方面可能發生的種種問題提出兩則來探討，以就教讀者。一種是防範電腦誤差的程式設計、一種是電腦模擬實驗（Simulation）。

由於電腦本身工作能力是有一定極限的，超過此極限，便不可避免地會產生些微的誤差，累積下來便成了有相當差距的結果，而不能令人滿意。在此，舉個實例來說明：學生在數學上學會了一元二次方程式

$$AX^2+BX+C=0$$

的解法，他就將嘗試著以公式

$$X=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

去寫電腦程式，輸入電腦，並將不同的係數$A$，$B$，$C$鍵入電腦，很快地他就得到了答案。可是，當他嘗試以一些很大的與一些很小的係數鍵入，例如說，以

$$A=2\ ;\ B=-1000000\ ,\ C=0.0002$$

鍵入時，電腦輸出的答案是：

500000與0

這個答案一定會令他感到十分驚奇，因爲這個答案顯然和他在數學中學到的“根與係數關係”性質不符合。於是該生可能會找數學老師詢問。這時候，數學老師該如何的回答，並協助他完成電腦程式的設計呢？事實上，毛病就在由於$B$值與$C$值相差很大，因而$B^2$就比$4AC$大得更多。所以在根號內的$B^2-4AC$自然的非常接近$B$值了。於是在：

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

中之分子就變成（$-B+B$）了，因而電腦就會把它當成零。在“數値分析”裏，稱這種錯誤爲“Subtractive-Cancellation”，所以把兩個非常接近的數值做相減運算是一大忌，應極力避免這種情形。解決之道，乃是將上式分子有理化如下：

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$=\frac{(-B+\sqrt{B^2-4AC})(-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A(-B-\sqrt{B^2-4AC}}$$

$$=\frac{2C}{-B-\sqrt{B^2-4AC}}$$

然後，以$\dfrac{2C}{-B-\sqrt{B^2-4AC}}$ 代替 $\dfrac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ 來寫程式。現在附錄這個電腦程式如下：

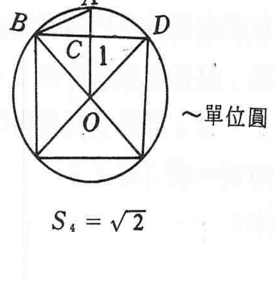
```
5:"A":CLEAR .
  WAIT 0
10:INPUT "A=? (A<
  >0)";A,"B=";B,
  "C=";C
15:INPUT K=";K
16.LPRINT "K=";K
20:B1=-B/2/A
30:D1=B1*B1-C/A
32.IF (B=0)AND (C
  =0)GOTO 95
33:IF D1<0THEN 60
35:IF ABS (SGN (A
  *B)*ABS ((B+√(
  B*B-4*A*C))/2)
  -ABS (B))<K
  GOTO 155
38:IF ABS (SGN (A
  *B)*ABS ((-B+√
  (B*B-4*A*C))/2
  )+ABS (B))<K
  GOTO 180
40:IF D1=0GOTO 95
50:IF D1>0GOTO 11
  5
60:Y=√(-1*D1)
65:LPRINT "two im
  oginary ro -ot
  s : "
68:COLOR 1
70:LPRINT "  X1="
  ;B1;" -";Y;"*i
  "
80:LPRINT "  X2="
  ;B1;"+";Y;"*i"
90:END

95:LPRINT "equal
  roots :"
```

```
98:COLOR 2
100:LPRINT "   X1=X
    2=";B1;""
110:END
115:LPRINT "two re
    al*roots :"
118:COLOR 3
120:LPRINT "   X1="
    ;B1+√(D1);""
130:LPRINT "   X2="
    ;B1-√(D1);""
140:END
155:LPRINT "two re
    al roots :"
158:COLOR 2
160:LPRINT "   X1="
    ;C/(A*(B1-√D1)
    )
165:LPRINT "   X2="
    ;B1-√(D1)
170:END
180:LPRINT "two re
    al roots :"
185:COLOR 2
190:LPRINT "   X1="
    ;C/(A*(B1+√D1))
195:LPRINT "   X2="
    ;B1+√(D1)
200:END
```

有了這個程式、我們就可以用來解決上面所遇到的困難。請看下面電腦程式執行樣本。

```
K= 0.0001
two real roots :
   X1= 2E-10
   X2= 500000
```

由此例子可知將來在數學教學方面宜注重系統分析觀念，及教導學生懂得如何選擇公式，採用較為穩定的公式。這都是教學內容改變的一些重要課題，下面再舉一個具體例子：如何利用幾何學上的圓內接正多邊形與圓外切多邊形的周長來逼近求得圓周率 $\pi$ 的近似值。首先我們可以在一個單位圓內劃一個內接正四邊形，然後再依計算的次數，倍增加邊數，如邊數 $n=4$ 時，其每邊長用 $S_4$ 表示，則得：




$$S_4=\sqrt{2}$$

接著，將 4 邊形之邊數加倍，得一內接正 8 邊形，且其邊長為：

$$S_{2\times 4}=S_8=\overline{AB}$$

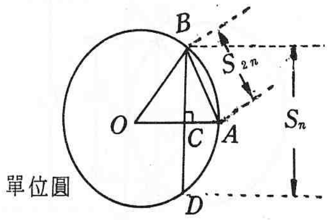
式中：$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

$$\overline{AB}^2=\frac{S_4^2}{4}+\left[\,1-\sqrt{1-\left(\frac{S_4^2}{4}\right)}\,\right]^2$$

$$\overline{AB}^2=2-2\sqrt{1-\frac{S_4^2}{4}}$$

故 $\quad S_{2\times 4}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

一般情形，我們可以利用單位圓之內接 $n$ 邊形之邊長 $S_n$ 求得內接 $2n$ 邊形之邊長 $S_{2n}$ 如下：




在 Rt $\triangle OBC$ 中，得：

$$\overline{OB}^2=\overline{OC}^2+\overline{BC}^2$$

且在 Rt $\triangle BCA$ 中得：

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$

式中：$\overline{OB}=1$ ，$\overline{BC}=\frac{1}{2}S_n$ ，$\overline{AB}=S_{2n}$

又因為 $\quad \overline{CA}=\overline{OA}-\overline{OC}=1-\overline{OC}$

所以得： $\quad 1=\overline{OC}^2+\left(\frac{S_n}{2}\right)^2$

或 $\quad \overline{OC}=\frac{1}{2}\sqrt{4-S_n^2}$

則： $\quad S_{2n}^2=\left(\frac{S_n}{2}\right)^2+\left(\,1-OC\,\right)^2$

或 $\quad S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}$

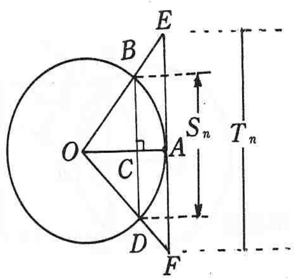
利用這個公式，我們可以算出各種多邊形的邊

長，將邊長再乘以其邊數卽得多邊形之周長。當邊數$n$不斷地倍增，則多邊形之周長就越來越趨近於單位圓之圓周或$\pi$，又因此種多邊形爲內接多邊形，故其周長必小於$\pi$值，所以下式

$$L_n=\frac{1}{2}n\,S_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (甲)$$

可以用來計算$\pi$之近似值，卽$\pi$的下限。

同時，我們又可以先將單位圓作一外切正4邊形，然後如前所述，不斷地再將邊數倍增，就可以得出一系列的外切正多邊形之邊長。請看下圖：




圖中以$BD$表內接正$n$邊形之邊長$S_n$，及$EF$表外切正$n$邊形之邊長$T_n$。

因$OA$平分$BD$與$EF$及$\triangle OBC \backsim \triangle OAE$，所以得：

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AE}}$$

在Rt$\triangle OBC$中知：

$$\overline{OB}^2=\overline{OC}^2+\overline{CB}^2$$

且知：$\overline{OB}=\overline{OA}=1$，$\overline{CB}=\frac{1}{2}S_n$，

$$\overline{AE}=\frac{1}{2}T_n$$

故　$$\overline{OC}=\frac{S_n}{T_n}$$

則　$$1=\frac{S_n^2}{T_n^2}+\left(\frac{S_n}{2}\right)^2$$

或：　$$\frac{S_n}{T_n^2}=1-\frac{S_n^2}{4}=\frac{4-S_n^2}{4}$$

故　$$T_n=\frac{2S_n}{\sqrt{4-S_n^2}}$$

因外接多邊形之周長大於圓周，同理當邊數$n$變得很大時，正外接$n$邊長之周長就趨近單位圓之圓周長，因而我們得到下式

$$U_n=\frac{n\,S_n}{\sqrt{4-S_n^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (乙)$$

做爲圓周或$\pi$之上限，亦可用來計算$\pi$之近似值。所以我可得結論如下：

$$\frac{1}{2}n\,S_n \leqslant \pi \leqslant \frac{1}{2}n\,T_n$$

或　$$L_n \leqslant \pi \leqslant U_n$$

現在某些學生根據(甲)式及(乙)式來寫個十分簡單的電腦程式，（請見下列BASIC電腦程式），利用電腦不斷將上述那些多邊形之邊數$n$倍增，以求出越來越精確之圓周率$\pi$。

```
 5:"A":CLEAR :
   WAIT 0
10:S=√2:N=4
15:N=2*N
20:S=√(2-√(4-S*S)
   )
30:L=(S*N)/2
40:UN=(S*N)/√(4-S
   *S)
50:LPRINT "N=";N
60:LPRINT "LN=";L
   :LPRINT "UN=";
   UN
80:GOTO 15
```

程式中$N$表邊數，LN 表$\pi$之下限，UN 表$\pi$之上限。由下圖電腦執行樣本可以看出，開始$\pi$之近似值還是與我們所希望的結果相近，尚算是滿意，但是繼續演算時，$\pi$之下限增加甚至超過了$\pi$值。到後來竟然得出些奇怪的結果，終於得到一堆「零」！

執行樣本：

```
N= 8
LN= 3.061467458
UN= 3.313708498
N= 16
LN= 3.121445151
UN= 3.182597877
N= 32
LN= 3.13654849
UN= 3.151724906
N= 64
LN= 3.140331156
UN= 3.144118384
N= 128
LN= 3.141277251
UN= 3.14222363
N= 256
LN= 3.141513807
UN= 3.141750375
N= 512
LN= 3.141572923
UN= 3.141632063
N= 1024
LN= 3.141587942
UN= 3.141602727
N= 2048
LN= 3.141592949
UN= 3.141596645
N= 4096
LN= 3.141594618
UN= 3.141595542
N= 8192
LN= 3.141607969
UN= 3.1416082
N= 16384
LN= 3.141714774
UN= 3.141714831
N= 32768
LN= 3.142141955
UN= 3.14214197
N= 65536
LN= 3.142996147
UN= 3.142996151
N= 131072
LN= 3.149821337
UN= 3.149821338
N= 262144
LN= 3.15663177
UN= 3.15663177
N= 524288
LN= 3.210595195
UN= 3.210595195
N= 1048576
LN= 3.31588846
UN= 3.31588846
N= 2097152
LN= 3.31588846
UN= 3.31588846
N= 4194304
LN= 0
UN= 0
N= 8388608
LN= 0
UN= 0
N= 16777216
LN= 0
UN= 0
N= 33554432
LN= 0
UN= 0
```

顯然有重大錯誤發生。這個問題出在何處呢？於是又找數學老師查詢原因。此時，數學老師又須懂得如何去解答了。

首先觀察到公式：

$$S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}$$

中，當 $n$ 增大時，$S_n$ 減小，於是 $S_n^2$ 就趨近於 0，而 $\sqrt{4-S_n^2}$ 趨近於 2。所以 $2-\sqrt{4-S_n^2}$ 成爲兩個非常接近的數相減而造成了減性抵消（Subtractive cancellation）。這種誤差在計算 $S_{2n}$ 及 $T_{2n}$ 時又不斷地被放大，所以導致了古怪的結果。解決之道，可以利用二項式定理修改電腦程式。這回就可以得出很滿意的結果。

爲了避免減性抵消，可以利用二項式定理將 $\sqrt{4-S_n^2}$ 展開如下：

$$\sqrt{4-S_n^2}=(4-S_n^2)^{\frac{1}{2}}=2-d_1-d_2-\cdots\cdots-d_k-\cdots\cdots$$

式中：$d_1=\dfrac{S_n^2}{4}$

$$d_{k+1}=\frac{2k-1}{k+1}\left(\frac{S_n^2}{2^3}\right)d_k$$

因此：
$$2-\sqrt{4-S_n^2}=d_1+d_2+\cdots\cdots+d_k+\cdots\cdots$$

當 $S_n<1$ 時，$d_k$ 隨著 $k$ 之增加而遞減得極快，又相繼的各項都再乘上 $\dfrac{S_n^2}{8}$，所以計算就變成了加法，然後再求 $\sqrt{d_1+d_2+\cdots+d_k+\cdots}$。這樣可以避免減性抵消的發生，其結果相當穩定。

程式修改如下，用這個程式，圓周率 $\pi$ 可以求得相當準確的數值。

```
100:"S":CLEAR
   WAIT 0
110:S=√2:N=4
120:N=2*N
```

```
130:D=S*S/4
140:T=D:GOSUB 200
150:S=√D
160:L=S*N/2:UN=(S*
    N)/(2-D)
170:LPRINT "N=";N
180:LPRINT "LN=";L
    :LPRINT "UN=";
    UN
190:GOTO 120
200:FOR K=1TO 100
210:T=((2*K-1)/(K+
    1))*S*S*T/8
220:D=D+T
230:NEXT K
240:RETURN
```

執行樣本：

```
N= 8
LN= 3.061467458
UN= 4.329568798
N= 16
LN= 3.12144515
UN= 3.378627884
N= 32
LN= 3.136548488
UN= 3.197997106
N= 64
LN= 3.140331155
UN= 3.155525874
N= 128
LN= 3.141277249
UN= 3.145065619
N= 256
LN= 3.14151[illegible]
UN= 3.14246025
N= 512
LN= 3.141572938
UN= 3.141809511
N= 1024
LN= 3.141587723
UN= 3.141646864
N= 2048
LN= 3.14159142
UN= 3.141606[illegible]35
N= 4096
LN= 3.141592345
UN= 3.141596041
N= 8192
LN= 3.141592576
UN= 3.1415935
N= 16384
LN= 3.141592633
UN= 3.141592864
N= 32768
LN= 3.141592647
UN= 3.141592705
N= 65536
LN= 3.141592651
UN= 3.141592665
N= 131072
LN= 3.141592652
UN= 3.141592655
N= 262144
LN= 3.141592652
UN= 3.141592653
N= 524288
LN= 3.141592652
UN= 3.141592652
N= 1048576
LN= 3.141592652
UN= 3.141592652
N= 2097152
LN= 3.141592652
UN= 3.141592652
N= 4194304
LN= 3.141592653
UN= 3.141592653
N= 8388608
LN= 3.141592653
UN= 3.141592653
N= 16777216
LN= 3.141592653
UN= 3.141592653
N= 33554432
LN= 3.141592653
UN= 3.141592653
```

由於電腦的問世，一些從前不可能讓學生做的習題，現在則可以輕易付諸實行了。例如我們想以1000或10000次以上的實驗來求得骰子投擲出現一定的點數值之機率，那必是曠日費時的，若欲由每一位學生親自來做實驗，更是天方夜譚。有了電腦學生則可輕易地利用實驗的隨機結果而得到答案。現在就讓我們一起運用電腦來探究這個問題：我們投擲一個公正的骰子，它最初出現爲$a$點的面（其中$a$爲由1至6的整數）的次數與投擲總次數之比在$\frac{1}{6}$附近的波動幅度較大，當投擲次數增大，其比值就會趨近一定值，而以$\frac{1}{6}$爲其極限。換言之，觀察次數愈多，則相對比值會愈來愈「穩定」，漸趨於某一數值。過去我們可能未查驗過這個事實，因爲要查驗此事必要花費相當長的時間和耐力，而且它需要相當多次的重複實驗。現在一個中學生只要有一部小型電腦就能夠相當滿意的解決這個問題。

下列的程式就是做了1000次，或10000次而得出非常好的估計值。

```
  3:"A":CLEAR :
    WAIT 0
  6:INPUT "K=";K,"
     a=";J
 10:LPRINT "no.of
    trials:";K
 11:IF J=1GOTO 13
 12:IF J<>1GOTO 15
 13:LPRINT "outcom
    e of";J;" dot
    ":GOTO 16
 15:LPRINT "outcom
    e of";J;" dots
    "
 16:LPRINT
 18:X=0
 20:FOR I=1TO K
 23:RANDOM
 25:N=RND (6)
 30:IF N<>JTHEN 60
 40:X=X+1
 60:NEXT I
 70:S=INT (120*X/K
    +0.5)
100:Q=120:R=S
110:IF INT (Q/R)=Q
    /RTHEN 150
120:P=R
130:R=Q-INT (Q/R)*
    R
140:Q=P:GOTO 110
150:Q=120/R:S=S/R
170:LPRINT "P(";J;
    ")=";X/K
175:COLOR 2
177:LPRINT "or :"
180:LPRINT "     P(
    ";J;")=";S;"/"
    ;Q
185:LPRINT
190:GOTO 3
```

執行樣本：

1：

```
no.of trials: 1000
outcome of 1 dot

P( 1)= 0.162
or :
P( 1)= 19/ 120
```

2：

```
o.of trials: 1000
utcome of 3 dots

P( 3)= 0.174
or :
P( 3)= 7/ 40
```

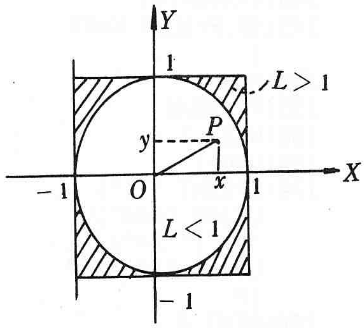
3：

```
no.of trials: 1000
outcome of 4 dots

P( 4)= 0.155
or :
P( 4)= 19/ 120
```

4：

```
no.of trials: 1000
outcome of 6 dots

P( 6)= 0.161
or :
P( 6)= 19/ 120
```

最後我們再應用“蒙地卡羅術（Monte Carlo）”，結合電腦來求 $\pi$ 值之近似值。所謂“蒙地卡羅術”就是利用實驗的隨機結果來解決問題的一種方法。例如我們可以在以2爲邊長的一個正方形中任意選若干多個點，計算落在正方形之內切單位圓內的點之數目，並求其所佔之比率，就可以算得圓周率 $\pi$ 之近似值了。如果選的點數愈多，其比率就愈趨近眞正之 $\pi$ 值。




設點 $P(x, y)$，爲正方形內任一點，其坐標 $x$，$y$ 分別用兩個獨立的亂數表示如下：

$$\begin{cases} x = 2\,(RND(999)/1000 - 0.5) \\ y = 2\,(RND(999)/1000 - 0.5) \end{cases}$$

隨機地產生$N$個點時，若有$k$個點落在單位圓內，則有$k$個能夠滿足下列條件之（$x$，$y$）。

$$L=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}<1$$

則$\pi$之近似值可以下式來計算

$$\frac{\pi}{4}\doteqdot\frac{K}{N}$$

或
$$\pi\doteqdot 4\frac{K}{N}$$

下面是根據上述原理設計而成的程式，結合電腦進行模擬實驗，並當$N=10000$時，計算得$\pi$之近似值爲：3.145。

執行樣本：

```
 5:"A":CLEAR :
   WAIT 0
 20:USING "#####"
 50:INPUT "N=";N,"
   T=";T
 60:LPRINT "no.of
   trails:";N
 70:PRINT "no. of
   times:";T
100:K=0:H=0:V=0
110:FOR J=1TO T
115:FOR I=0TO N
118:RANDOM
120:X=2*(RND (999)
    /1000-0.5)
130:Y=2*(RND (999)
    /1000-0.5)
140:R=X*X+Y*Y
145:IF R<1LET K=K+
    1
150:H=H+1
155:P=4*K/H
160:NEXT I
165:V=V+1
170:LPRINT "T(";
    USING "###";V;
    "):";" П=";
    USING "##.###"
    ;P
180:NEXT J
200:INPUT "more da
    ta ? (yes=Y,no
    =N)";Z$
210:IF Z$="Y"THEN
    5
250:END

 no..of trails: 1000
 T(  1): П= 3.188
 T(  2): П= 3.138
 T(  3): П= 3.167
```

從上述實例中，我們可發現在未來的中學教育中，電腦勢將引發數學教育的不斷革新和層次的提昇。過去單向教學的局面將被打破，教師和學生之間的溝通將日益緊密，教師藉著電腦的協助必可引導學生進入奧妙的數學殿堂之中，學生經由電腦素養的提昇亦可培養高度的學習興趣，使數學的演算不再是乏味艱難的工作；數學的實驗亦可付諸實施。當此之際，我們應及早規劃未雨綢繆，爲百年樹人的大業早日打下堅固的根基。本文雖屬淺薄，但仍希望對從事數學教育的教師有所裨益。

後記：本文中所有程式皆由Microsoft BASIC寫成，此類BASIC程式可以在SHARP PC-1500 上直接執行，而在CASIO PB700，APPLE Ⅱ，小教授或其它電腦上執行，僅有一些小變動而已。

## 參考資料


1. 陳至剛：數值分析與電腦工程應用，資訊教育推廣中心，民72年。
2. 楊正甫：計算機程式BASIC，松崗電腦圖書資料有限公司，民72年。
3. DONINMAN JIMCONLAN: Problem Solving-on the TRS-80 Pocket Computer，漢陽圖書有限公司，民72年。
4. SHARP Pocket computer PC-1500。
5. J.P.Lamoitier : BASIC Exercises for the ATARI. SYBEX. Berkeley Paris 1983


——本文作者任教於私立延平中學——