可減的魔術三角形

王湘君

傳統的魔術三角形是一群數，排列成三角形，使得每一邊的和都相等。圖1就是這樣的一個例子。

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 5 & & 6 & \\ 3 & & 4 & & 2 \end{array}$$

圖1　每邊的和為9

我們把1, 2, 3, 4, 5和6，重新排在三角形的三邊上，使得每邊較大兩數的和減去最小的數，其差為定值。這是另一種形式的魔術三角形，稱為可減魔術三角形。圖2是兩個例子，更高階次的可減魔術三角形，可以同樣的方法做出。

$$\begin{array}{ccccc} & & 5 & & \\ & 1 & & 4 & \\ 3 & & 6 & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 6 & & \\ & 3 & & 2 & \\ 1 & & 5 & & 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} d &= (5+3)-1 \\ &= (6+3)-2 \\ &= (5+4)-2 \\ &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d &= (6+3)-1 \\ &= (6+4)-2 \\ &= (5+4)-1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

圖2

現在討論階次$K \geqslant 3$的可減魔術三角形，我們從每邊的K個數中，可得兩個部分和，令l表較大的和，

$$\begin{cases} \text{若}K\text{為奇數，則}\ l\ \text{是}\dfrac{K+1}{2}\text{個數的和} \\ \text{若}K\text{為偶數，則}\ l\ \text{是}\dfrac{K}{2}\text{個數的和} \end{cases}$$

S表較小的和。

$$\begin{cases} \text{若}K\text{是奇數，則}\ S\ \text{是}\dfrac{K-1}{2}\text{個數的和} \\ \text{若}K\text{為偶數，則}\ S\ \text{是}\dfrac{K}{2}\text{個數的和} \end{cases}$$

令d表l與S的差，三邊都有相同的d，圖3列出4階及5階的兩個可減魔術三角形。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 3 & & & \\ & & 5 & & 1 & & \\ & 8 & & & & 7 & \\ 9 & & 4 & & 2 & & 6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} d &= (9+8)-(5+3) \\ &= (6+7)-(3+1) \\ &= (9+6)-(4+2)=9 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 7 & & & & \\ & & & 4 & & 6 & & & \\ & & 3 & & & & 2 & & \\ & 9 & & & & & & 1 & \\ 11 & & 8 & & 12 & & 5 & & 10 \end{array}$$

$$\begin{aligned} d &= (11+9+7)-(4+3) \\ &= (10+7+6)-(2+1) \\ &= (12+11+10)-(8+5) \\ &= 20 \end{aligned}$$

圖3

這種觀點下的魔術三角形會引起一些問題來。

1. 除了上面列舉的可減魔術三角形外，是否

還有其他的？

2. 對每一個自然數 n 而言，是否可由前 $3n$ 個自然數做成可減魔術三角形？（$n \geqslant 2$）
3. 把每一邊的每一元素增加一個定數 m，那麼這個可減魔術三角形是否仍保持魔術性？
4. 又每一元素乘上一個定數 k，其結果如何？（必須考慮這定數是正或負）
5. 在上面 3 和 4 問中，魔術差是多少？
6. 假設階次已知，那麼魔術差最大是多少？最小是多少？
7. 算術數列是否可以排成可減魔術三角形？

下面是這些問題的簡答：

1. 有。下面是另兩個可減魔術三角形

6
4　2
5　1　3

$d = 7$

7
4　9
2　　8
6　5　1　3

$d = 7$

2. 當 $2 \leqslant n \leqslant 6$ 時，可以。但當 $n > 6$ 時，尚未確定。

3 階、4 階的可減魔術三角形，前面已列出，下面是 5 階、6 階和 7 階的魔術三角形。

12
2　9
3　　10
5　　　11
4　6　7　1　8

$d = 16$

12
2　13
5　　6
10　　　14
4　　　　3
8　9　7　1　15　11

$d = 19$

13
2　10
3　　16
17　　　14
4　　　　15
6　　　　　5
7　8　12　1　18　11　9

$d = 34$

3. 是的。
4. 假如是偶階的，答案是肯定的。
   假如定數 k 是正的，那麼奇階可減魔術三角形仍保持魔術差的特性。
5. 假定我們討論的魔術三角形的階次爲 n，則
   (a)假如加一個定數 m，那麼魔術差變爲 $d+m$。
   (b)假如 n 爲偶數或 n 爲奇數但 K 是正的，則乘上 K 以後，魔術差變爲 $d|K|$。
   若乘一個負數到奇階可減魔術三角形的每一元素，此時，這三角形可能不成爲魔術三角形了。
6. 假設 n 是魔術三角形的階次，則

$$\frac{n^2}{4} \leqslant d \leqslant \frac{n}{4}(5n-6) \quad \text{當 } n \text{ 爲偶數}$$

及

$$\frac{(n+1)^2}{4} \leqslant d \leqslant \frac{5}{4}(n^2-1) \quad \text{當 } n \text{ 爲奇數}$$

上二式左右兩邊的數，只是 d 的上、下限，並非最大下限與最小上限。

7. 可以。

（本文譯自：Sunday A. Ajose：Substractive Magic Traiangles *Math. Teacher*, May 1983，PP.346～347。

—本文譯者任教於師大附中—