上期徵答問題

優勝名單：

9101 優勝名單

特優：林建宏（台北工專）

優良：陶堅強（輔大數學）

良好：胡豐榮（台中師專）

左漢榮（台中師專）

吳建華

9102 優勝名單

特優：蔡岱朋（建國中學）

優良：陳力華（成功大學）

問題詳解：

9101 再論“計算極限值”解答（林建宏）

令 $h(a,\varepsilon)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{i(n+a)}\right]^{1+\varepsilon}$

此處 $\varepsilon>0$，$0<a<1$。由於

$$|h(a,\varepsilon)|$$

$$\leqq\left|\frac{1}{a}\right|^{1+\varepsilon}+\left|\frac{1}{1-a}\right|^{1+\varepsilon}+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n+a}\right|^{1+\varepsilon}+\sum_{n=-2}^{-\infty}\left|\frac{1}{n+a}\right|^{1+\varepsilon}$$

$$\leqq\left|\frac{1}{a}\right|^{1+\varepsilon}+\left|\frac{1}{1-a}\right|^{1+\varepsilon}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<\infty$$

所以 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{i(n+a)}\right]^{1+\varepsilon}$ 爲絕對收斂，故次序可以調整。若以 Σ' 代表 n 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 取總和且不包含 $n=0$ 這一項，則

$$h(a,\varepsilon)$$

$$=\left(\frac{1}{ia}\right)^{1+\varepsilon}+\Sigma'\left(\frac{1}{i(n+a)}\right)^{1+\varepsilon}$$

$$=\left(\frac{1}{ia}\right)^{1+\varepsilon}+e^{-\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)i}\Sigma'\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-1-\varepsilon}$$

$$=\left(\frac{1}{ia}\right)^{1+\varepsilon}+e^{-\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)i}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-1-\varepsilon}+\left(-\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-1-\varepsilon}\right]$$

因 $0<\frac{a}{n}<1$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$，故由二項式定理得

$$h(a,\varepsilon)$$

$$=\left(\frac{1}{ia}\right)^{1+\varepsilon}+e^{-\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)i}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-k-\varepsilon)\cdots(-1-\varepsilon)}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^{k}\right]+\left(-\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-k-\varepsilon)\cdots(-1-\varepsilon)}{k!}\left(-\frac{a}{n}\right)^{k}\right]\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{ia}\right)^{1+\varepsilon}-2\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}+e^{-\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)i}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-k-\varepsilon)\cdots(-1-\varepsilon)}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^{1+k+\varepsilon}\left[1+e^{\pi i(1+k+\varepsilon)}\right]$$

考慮不等式

$$\int_{n+1}^{n+2}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}\leqslant\frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}\leqslant\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$$

$$n=1,2,3,\cdots,N$$

現將上式取總和，得

$$\int_{2}^{N+2}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}\leq\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\leq\int_{1}^{N+1}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$$

$$N=1,2,3\cdots\cdots$$

簡單的計算給出