本文譯自 Ivan D. Stones, The Harmonic Triangle : Opportunities for Patten Identification and Generalization, Mathematics Teacher, May 1983, pp. 350～354.

調和三角形

王 湘 君

當我們探討數字三角形時，有一些模型很容易激起我們的興趣，做進一步的探究。“注視模型”這是一項數學的舉動，它不僅具有挑逗性和趣味性，而且還可以發現解決問題的技巧。

數字三角形已經把數學家吸引了好幾世紀，最有名的數字三角形要算是算術三角形（見表 1 ）也就是聞名的巴斯卡三角形。另一個數字三角形，也一樣是很有趣味的模型，那就是調和三角形（見表 2 ）。

調和三角形和算術三角形有很多性質類似。萊布尼茲是第一個對這些性質著迷和認識的數學家。（Boyer 1968, pp. 439, 440）

性質 1 （算術三角形）每一元（但第一列或第一行除外）是它上面一元和左邊一元的和。

例如，第 4 行的 35 ，它上面一元是 20 ，左邊一元是 15 ，而 35 = 20 + 15 。

（調和三角形）每一元是它下面一元和右

表 1 算術三角形

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	
1	3	6	10	15	21	28	36	…		
1	4	10	20	35	56	84	…			
1	5	15	35	70	126	…				
1	6	21	56	126	…					
1	7	28	84	…						
1	8	36	…							
1	9	…								
1	…									

表 2　調和三角形

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	…
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{90}$	…	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{360}$	…		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{504}$	$\frac{1}{840}$	…			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{630}$	$\frac{1}{1260}$	…				
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{504}$	$\frac{1}{1260}$	…					
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{840}$	…						
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{360}$	…							
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{90}$	…								
$\frac{1}{10}$	…									

邊一元的和。

例如，第 5 行的 $\frac{1}{280}$，它下面一元是 $\frac{1}{630}$，右邊一元是 $\frac{1}{504}$，而 $\frac{1}{280}=\frac{1}{630}+\frac{1}{504}$。

性質2　（算術）每一元（但第一行除外）是它下面一元和左邊一元的差。

例如，第 3 行的 15，它下面一元是 21，左邊一元是 6，而 15 = 21 − 6。

（調和）每一元（但第一列除外）是它上面的一元，和右邊一元的差。

例如，在第 6 行的 $\frac{1}{168}$，它上面的一元是 $\frac{1}{42}$，右邊的一元是 $\frac{1}{56}$，而 $\frac{1}{168}=\frac{1}{42}-\frac{1}{56}$。

性質3　（算術）每一元（但第一列，第一行除外）是它上面一元和其左邊所有元的和。

例如，第 4 行的 56，它上面的元是 35，35 左邊的元有 15，5，1 而 56 = 35 + 15 + 5 + 1。

（調和）每一元是它下面一元和該元右邊所有元的和。

例如，第 4 行的元 $\frac{1}{20}$，它正下面的元是 $\frac{1}{60}$，$\frac{1}{60}$ 右邊的元有 $\frac{1}{105}$，$\frac{1}{168}$，$\frac{1}{252}$，$\frac{1}{360}$，……。

$$\text{而} \frac{1}{20}=\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\frac{1}{168}+\frac{1}{252}+\frac{1}{360}+\cdots$$

性質4 調和三角形，第 n 斜列的每一元是 n 乘以算術三角形第 n 斜列對應元的倒數。

例如，在算術三角形中，第 6 斜列的元是 1，5，10，10，5，1；6 乘以這些元的倒數是 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{30}$，$\frac{1}{60}$，$\frac{1}{60}$，$\frac{1}{30}$，$\frac{1}{6}$，這正好是調和三角形第 6 斜列的元。

算術三角形的性質 1 經常被用來產生新的元，同樣的，調和三角形的性質 2，也可產生新的元，但是必須先完成前面幾列的所有元才行，這顯得麻煩了些。當然性質 4 和算術三角形可以用，但我們想用更一般化的方法來產生新的元。

在尋找一般化的過程中，一些有趣的模型發生了，表 3 是把每一橫列的分母列出，並計算出所有的階差，我們發現第 n 列的分母，它的第 n 次階差都是 n，假如每一次階差的第一元確定了，那麼調和三角形每一列的分母就可以產生。

表 3 調和三角形第 1～5 列分母以及它們的階差

第一列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
第一階差	1	1	1	1	1	1	1	1	…	
第二列	2	6	12	20	30	42	56	72	…	
第一階差	4	6	8	10	12	14	16	…		
第二階差	2	2	2	2	2	2	…			
第三列	3	12	30	60	105	168	252	360	…	
第一階差	9	18	30	45	63	84	108	…		
第二階差	9	12	15	18	21	24	…			
第三階差	3	3	3	3	3	…				
第四列	4	20	60	140	280	504	840	…		
第一階差	16	40	80	140	224	336	…			
第二階差	24	40	60	84	112	…				
第三階差	16	20	24	28	…					
第四階差	4	4	4	…						
第五列	5	30	105	280	630	1260	…			
第一階差	25	75	175	350	630	…				
第二階差	50	100	175	280	…					
第三階差	50	75	105	…						
第四階差	25	30	…							
第五階差	5	…								

下面是每一階差的第一元，形成下列三角形：

$n=1$	1	1				
$n=2$	2	4	2			
$n=3$	3	9	9	3		
$n=4$	4	16	24	16	4	
$n=5$	5	25	50	50	25	5

這三角形似曾相識，因爲只要提出每一列公因數 n，我們得到

$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

這是算術三角形第 2 斜列開始到第 6 斜列的元，因此想要產生調和三角形第 6 斜列的分母，我們把算術三角形第 7 斜列的各元乘以 6，就得到每一階差的第一元。

第 7 斜列

1　6　15　20　15　6　1

（第 7 斜列）× 6

6　36　90　120　90　36　6

我們得到

6

36

90

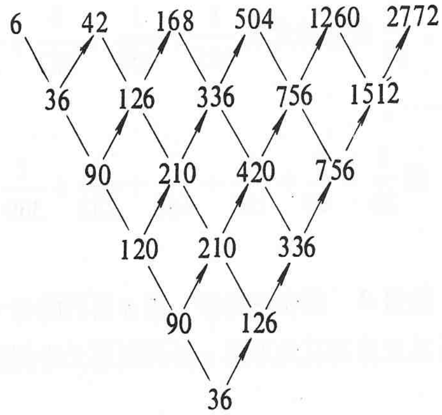
120

90

36

6　6　6　6　…

因此我們可以建立階差的其他元



所以調和三角形第 6 斜列的元是

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{42},\ \frac{1}{168},\ \frac{1}{504},\ \frac{1}{1260},\ \frac{1}{2772},\ \cdots$$

用這方法產生調和三角形的元，是我們假設所有元都是單位分數（分子爲 1），我們可以利用性質 2 說明它們的確是單位分數。表 4 的表法，正好看出每一元是它左邊一元和其下邊一元的差。

例如，第 4 行第二個元素 $\dfrac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$，可以由其第三行的第二個，第三個元的差產生，

$$\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{2\cdot(5-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

例如，第 3 行第 k 個元 $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)}$，可以由第 2 行的第 k 個及第 $k+1$ 個元的差產生，

$$\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

表 4 中第一行、第二行都是單位分數。第 3 行每一元的分母是 3 個連續整數的乘積，但

表 4

列＼行	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1\cdot 2}$	$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 3}$	$\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}$	$\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$	$\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3\cdot 4}$	$\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}$	$\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$	$\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$
…					
k	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k(k+1)}$	$\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$	$\frac{2\cdot 3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{2\cdot 3\cdot 4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$
$k+1$	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{2\cdot 3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	……
$k+2$	$\frac{1}{k+2}$	$\frac{1}{(k+2)(k+3)}$	$\frac{2}{(k+2)(k+3)(k+4)}$	……	
$k+3$	$\frac{1}{k+3}$	$\frac{1}{(k+3)(k+4)}$	……		
……					

至少有一是2的倍數，所以每一分數，都可化爲單位分數。第4行每一元的分母是4個連續整數的乘積，但至少有一是2的倍數，以及3的倍數，所以它們仍爲單位分數，假如這表列到第 n 行，分子是 $(n-1)!$ 分母是 n 個連續整數的乘積，而且必爲 $(n-1)!$ 的倍數，所以所有的元都是單位分數。

表4不只說明每一元是單位分數，同時告訴我們第 n 行第 k 元是

$$h_{n,k}=\frac{(n-1)!\,(k-1)!}{(n+k-1)!}$$

—本文譯者任敎於師大附中—