費氏數列空間

何　景　國

中世紀 1202 年時，義大利名數學家費伯納西（Fibonacci）在其著作「LIBER-ABACI」裡，提出了兎子問題，其中兎子衍生數的前幾項如下：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ……

而上述數列現在被稱爲單純的費氏數列。此數列開始的前兩項都是 1，以後的每一項均爲其前面兩項的和。但是一般項 a_n 則很難觀察出來；尤其是廣義的費氏數列的一般項的計算。本文將以線性代數的方法來討論由好幾個單純的、狹義的費氏數列的線性組合所成的費氏數列空間。並舉例證明其性質。玆分兩部分敍述：第一部分談費氏數列空間的一些重要性質及證明廣義的費氏數列的一般項計算公式。第二部分，就本文所談的性質及定理加以舉例闡明。

在一個數列 $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ 中，對任意 n，a_n 可以用一個或兩個 a_i，$i<n$ 的遞迴關係式以及一個適當的邊界條件來表示。現在我們爲廣義的費氏數列下一個定義。

所謂廣義的費氏數列，就是能滿足下列的遞迴關係式及一個邊界條件的數列 $(u_n)_{n=0}^{\infty}$：

$$\begin{cases} \text{遞迴關係：} u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2} \\ \text{邊界條件：} u_0 = f(0),\ u_1 = f(1) \end{cases}$$

式中：α，β 爲已予的兩個實數，以及 f 爲一實值函數。

上述的兎子衍生數列中其遞迴關係式爲：

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

以及邊界條件是 $u_0 = 1$，且 $u_1 = 1$。

第一部分：費氏空間及其定理

定理 1　設集合 F：

$$F = \{ (u_n)_{n=0}^{\infty} \mid u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2} \}$$

其中　　α，$\beta \in \boldsymbol{R}$

以及其邊界條件：$u_0 = f(0)$，$u_1 = f(1)$，其中 f 爲一實值函數，則 F 爲一個佈於實數系 $\boldsymbol{R}$ 的二維向量空間。此空間在數學上稱爲費氏數列空間。

証明　設 $(u_n) \in F$，$(v_n) \in F$，且

$$(w_n) = (u_n) + (v_n)$$

其中 $w_n = u_n + v_n$

則

$$\begin{aligned} w_n &= (\alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}) \\ &\quad + (\alpha v_{n-1} + \beta v_{n-2}) \\ &= \alpha(u_{n-1} + v_{n-1}) \\ &\quad + \beta(u_{n-2} + v_{n-2}) \end{aligned}$$

或

$$w_n = \alpha w_{n-1} + \beta w_{n-2}$$

故得

$$(w_n) \in F$$

另一方面，對任一實數 γ 而言，則由於

$$\begin{aligned} \gamma(u_n) &= \gamma(\alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}) \\ &= \alpha(\gamma u_{n-1}) + \beta(\gamma u_{n-2}) \end{aligned}$$

得知

$$(\gamma u_n) \in F$$

故集合 F 爲一佈於實數系的向量空間。

考慮 (v_n)，$(w_n) \in F$，其中

$$v_0 = w_1 = 1, \quad v_1 = w_0 = 0$$

則對於任意 F 中之元素 u_n，可以得到：

$$\begin{cases} u_0 = u_0 \cdot 1 + u_1 \cdot 0 \\ \quad = u_0 v_0 + u_1 w_0 \\ u_1 = u_1 \cdot 0 + u_1 \cdot 1 \\ \quad = u_0 v_1 + u_1 w_0 \end{cases}$$

由歸納法 知，對於任意 n，

$$u_n = u_0 \cdot v_n + u_1 w_n$$

也就是

$$(u_n) = u_0(v_n) + u_1(w_n)$$

其次 (v_n) 和 (w_n) 是線性獨立，因爲對任意 α，$\beta \in \boldsymbol{R}$，$\alpha(v_n) + \beta(w_n) = (0)$ 將會導致

$$\alpha v_0 + \beta w_0 = \alpha v_1 + \alpha w_1 = 0$$

亦即是得

$$\alpha = \beta = 0$$

因此，$\{(v_n), (w_n)\}$ 爲 F 的基底，此即證明

$$\dim F = 2$$

下面是求費氏數列一般項的計算公式：

定理2 設 (u_n) 爲一費氏數列，其遞迴式如下：

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$$

及其邊界條件

$$\begin{cases} u_0 = b \\ u_1 = a \end{cases}$$

則：

(1)當 $\alpha^2 + 4\beta > 0$ 時；

$$u_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2}(a - \lambda_2 b) + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}(b\lambda_1 - a)$$

其中：λ_1，λ_2 爲方陣 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的兩個相異特徵值。

(2)當 $\alpha^2 + 4\beta = 0$ 時：

$$u_n = \left(b + \frac{2a - \alpha b}{\alpha} n\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

其中：γ 爲方陣 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的相同實數特徵值。

(3)當 $\alpha^2 + 4\beta < 0$ 時：

$$\begin{aligned} u_n = \frac{1}{\sin\theta} [&\gamma b \sin\theta \cos n\theta \\ &+ (a - \gamma b \cos\theta) \sin n\theta] \gamma^{n-1} \end{aligned}$$

其中：複數 $\lambda_{1,2} = \gamma(\cos\theta \pm i \sin\theta)$ 爲方陣 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的複數特徵值。

證明：設 F 中任一元素 (u_n)，則

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$$

其中 α，$\beta \in \boldsymbol{R}$

假設 λ_1，λ_2 是 $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$ 的兩個根

(1)當 $\alpha^2 + 4\beta > 0$ 時，上式方程式有兩個相異的實根 λ_1 和 λ_2。

(λ_1^n) 與 (λ_2^n) 是 F 中線性獨立的兩向量。故 F 中任意一元素 (u_n) 皆可表成如下的形式：

$$u_n = s\lambda_1^n + t\lambda_2^n$$

特別地，對 $u_0 = b$ ，$u_1 = a$ ，得

$$\begin{cases} b = s + t \\ a = s\lambda_1 + t\lambda_2 \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} s = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(a - \lambda_2 b) \\[2ex] t = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 b - a) \end{cases}$$

故得

$$u_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(a - \lambda_2 b)\lambda_1^n + (\lambda_1 b - a)\lambda_2^n\right]$$

或

$$u_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2}(a - \lambda_2 b) + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 b - a)$$

(2)當 $\alpha^2 + 4\beta = 0$ 時，特徵方程式有重根

$$\lambda = \frac{\alpha}{2}$$

數列 $\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\right)$ 與 $\left(n\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\right)$ 皆在 F 中同時又是線性獨立，因

$$\alpha\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} + \beta\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-2}$$

$$= \alpha\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} - \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-2} \quad (\forall n)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

與

$$\alpha\left[(n-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}\right] + \beta\left[(n-2)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-2}\right]$$

$$= \alpha(n-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} - (n-2)\frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 2(n-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n - (n-2)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

$$= n\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

所以得知 $\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n, n\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\right\}$ 爲 F 中的一個基底。故 F 中任意一元素 (u_n) 皆可表成如下的形式：

$$\begin{cases} u_n = s\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n + tn\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n \\[2ex] \quad = (s + tn)\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n \\[2ex] u_0 = s,\ u_1 = (s + t)\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

或

$$t = \frac{1}{\alpha}(2u_1 - \alpha u_0)$$

$$= \frac{1}{\alpha}(2a - \alpha b)$$

故

$$u_n = \left(b + \frac{2a - \alpha b}{\alpha}n\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

(3)當 $\alpha^2 + 4\beta < 0$ 時，特徵方程式有兩共軛虛根：

$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \lambda_2 = \gamma(\cos\theta - i\sin\theta) \\ \quad = \overline{\lambda}_1 \end{cases}$$

則

$$\lambda_1^2 = \alpha\lambda_1 + \beta$$

或

$$\lambda_1^n = \alpha\lambda_1^{n-1} + \beta\lambda_1^{n-2}$$

$$\gamma^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$= \alpha\gamma^{n-1}\left[\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\right]$$

$$+\beta\gamma^{n-2}[\cos(n-2)\theta + i\sin(n-2)\theta]$$

比較上式之實部與虛部得：

$$\begin{cases} \gamma^n\cos n\theta = \alpha\gamma^{n-1}\cos(n-1)\theta + \beta\gamma^{n-2}\cos(n-2)\theta \\ \gamma^n\sin n\theta = \alpha\gamma^{n-1}\sin(n-1)\theta + \beta\gamma^{n-2}\sin(n-2)\theta \end{cases}$$

故

$$(\gamma^n\cos n\theta)\in F,\quad (\gamma^n\sin n\theta)\in F$$

又因

$$\frac{\gamma^n\cos n\theta}{\gamma^n\sin n\theta} = \tan n\theta \neq \text{常數 } c$$

所以

$$\{(\gamma^n\cos n\theta),(\gamma^n\sin n\theta)\}$$

為F的一個基底。

故F中任意一個(u_n)皆能表示成如下之形式：

$$u_n = s\gamma^n\cos n\theta + t\gamma^n\sin n\theta = (s\cos n\theta + t\sin n\theta)\gamma^n$$

且

$$u_0 = s$$

$$u_1 = (s\cos\theta + t\sin\theta)\gamma$$

$$t = \frac{1}{\gamma\sin\theta}(a - \gamma b\cos\theta)$$

故

$$u_n = (b\cos n\theta + \frac{a-\gamma b\cos\theta}{\gamma\sin\theta}\sin n\theta)\gamma$$

或

$$u_n = \frac{1}{\sin\theta}[\gamma b\sin\theta\cos n\theta + (a-\gamma b\cos\theta)\sin n\theta]\gamma^{n-1}$$

第二部分：四個論例

費氏數列的計算，在組合學上，物理及經濟學上有許多重要的應用，在列舉之前，請先看下面2個問題：

問題1　在F中是否有等比的費氏數列？

這個問題的答案是肯定的，這就是狹義的費氏數列。理由如下：

設數列$(a\gamma^n)$為所求，則因$(a\gamma^n)\in F$，易知：

$$a\gamma^n = \alpha a\gamma^{n-1} + \beta a\gamma^{n-2}$$

以及其特徵方程式

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$$

則F中有兩種等比的費氏數列如下：

$$a,\ a\lambda_1,\ a\lambda_1^2,\ a\lambda_1^3,\cdots,\ a\lambda_1^n,\cdots$$

$$a,\ a\lambda_2,\ a\lambda_2^2,\ a\lambda_2^3,\cdots,\ a\lambda_2^n,\cdots$$

其中，λ_1與λ_2為其特徵值。

問題2　如下求二階方陣A的n次乘冪（$n\geqslant 2$）

設方陣A的兩個相異實數特徵根為λ_1，λ_2，則對於λ_1，λ_2的特徵向量為：

$$X_1 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix},\quad X_2 = \begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}$$

則存在一方陣$P = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\1 & 1\end{pmatrix}$，使得下式成立：

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

式中

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\-1 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

由於

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\0 & \lambda_2^n\end{pmatrix} = P^{-1}\cdot A^n\cdot P\quad(n\geqslant 2)$$

所以

$$A^n = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\-1 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

即

$$A^n=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{n+1}\\ \lambda_1^n-\lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^n\end{pmatrix}$$

應用例說：設 $d\neq\pm1$，且 $d\in\boldsymbol{R}$，若 u_0，$v_0\in\boldsymbol{C}$，有兩數列 $(u_n)_{n=0}^{\infty}$，$(v_n)_{n=0}^{\infty}$ 界定爲

$$\begin{cases}u_n=2du_{n-1}-v_{n-1}\\ v_n=u_{n-1}\end{cases}$$

則

$$\begin{pmatrix}2d & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} & -\dfrac{\sin n\theta}{\sin t}\\ \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} & -\dfrac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}\end{pmatrix}_{2\times2}$$

解：設 $A=\begin{pmatrix}2d & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的兩特徵根爲

$\lambda_1=d+\sqrt{d^2-1}$，$\lambda_2=d-\sqrt{d^2-1}$

因　　$d\neq\pm1$

所以 λ_1，λ_2 的特徵向量

$$X_1=\begin{pmatrix}d+\sqrt{d^2-1}\\ 1\end{pmatrix}$$

與　$$X_2=\begin{pmatrix}d-\sqrt{d^2-1}\\ 1\end{pmatrix}$$

則存在一方陣

$$P=\begin{pmatrix}d+\sqrt{d^2-1} & d-\sqrt{d^2-1}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

故

$$A^n=P\cdot\begin{pmatrix}(d+\sqrt{d^2-1})^n & 0\\ 0 & (d-\sqrt{d^2-1})^n\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$$

又因 $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$，故承上知

$$A^n=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1} & -(\lambda_1^n-\lambda_2^n)\\ \lambda_1^n-\lambda_2^n & -(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})\end{pmatrix}$$

且式中

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=2\sqrt{d^2-1}\\ a=u_0=\cos\theta\end{cases}$$

則由

$$\lambda_1=\cos\theta+i\sin\theta$$

得

$$\lambda_1-\lambda_2=2i\sin\theta$$

$$\forall n>0$$

$$\lambda_1^n-\lambda_2^n=2i\sin n\theta$$

且　$\forall\theta$，$\sin\theta\neq0$

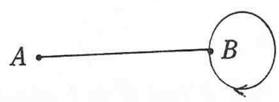
故

$$A^n=\begin{pmatrix}2d & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} & -\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}\\ \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} & -\dfrac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}\end{pmatrix}$$

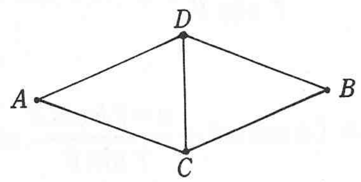
論例 1　圖形問題

如下圖所示的就是一有向圖（directed graph）G_1 與 G_2。其中沒有箭號相連的邊均表示雙行道。今試求以頂點 A 爲起點，B 爲終點，流程步驟長爲 n 的有向路徑數。

(i)



(ii)



解：

(i) 設 A_n 表由 A 爲起點，同時 A 亦爲終點，且流程步驟長爲 n 的有向路徑數；B_n 表由 A 到 B 在流程步驟，長爲 n 的有向路徑數。

因爲

$$\begin{cases}A_n=B_{n-1}\\ B_n=A_{n-1}+B_{n-1}\end{cases}$$

所以

$$B_n=A_{n-1}+B_{n-1}=B_{n-2}+B_{n-1}$$

或

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$$

其中

$$B_0 = 0\,,\quad B_1 = 1$$

又數列　$(B_n) \in F$

且　$\alpha = 1\,,\quad \beta = 1\,,$

$$a = B_1 = 1\,,\quad b = B_0 = 0$$

以及其特徵值分別爲

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

故由定理2得

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\times 0\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(0\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right)$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

或

$$(B_n) = (0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots\cdots)$$

(ii) 設 A_n 表由 A 到 A 以流程步驟長爲 n 的有向路徑數。

B_n 表由 A 到 B 以流程步驟長爲 n 的有向路徑數。

C_n 表由 A 到 C 以流程步驟長爲 n 的有向路徑數。

D_n 表由 A 到 D 以流程步驟長爲 n 的有向路徑數。

由對稱性易知：

$$C_n = D_n$$

又因

$$A_n = C_{n-1} + D_{n-1} = 2C_{n-1}$$

所以

$$\begin{cases} A_n = C_{n-1} + D_{n-1} = 2C_{n-1} \\ B_n = C_{n-1} + D_{n-1} = 2C_{n-1} \\ C_n = A_{n-1} + D_{n-1} + B_{n-1} \\ \quad = A_{n-1} + C_{n-1} + B_{n-1} \\ D_n = A_{n-1} + C_{n-1} + B_{n-1} \end{cases}$$

再由

$$B_n = 2C_{n-1}$$

$$C_{n-1} = A_{n-2} + C_{n-2} + B_{n-2} = 2C_{n-3} + C_{n-2} + B_{n-2}$$

得

$$B_n = 2(2C_{n-3}) + 2C_{n-2} + 2B_{n-2}$$

式中

$$2C_{n-3} = B_{n-2}$$

$$2C_{n-2} = B_{n-1}$$

故

$$B_n = B_{n-1} + 4B_{n-2}$$

討論：

當 $n = 0$ 時，　$B_0 = 0$

當 $n = 1$ 時，　$B_1 = 0$

當 $n = 2$ 時，　$B_2 = 2$

因此，　$(B_n) \in F$

且有　$\alpha = 1\,,\ \beta = 4\,,$

$$a = B_2 = 0\,,\quad b = B_1 = 0$$

以及其兩特徵值

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}\,,\quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

故

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(2-\frac{1-\sqrt{17}}{2}\times 0\right) + \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1}\left(0\times\frac{1+\sqrt{17}}{2}-2\right)$$

或

$$B_n = \frac{2}{\sqrt{17}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

論例2── 行列式值之計算

試計算下列 n 階行列之值

$$\begin{vmatrix} 2\,1\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,2\,1\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,2\,1\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,2\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\,0\,0\,0\,0 \cdots 0\,1\,2\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,1\,2\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,1\,2 \end{vmatrix}$$

解：設所求的n階行列式之值爲 u_n 將所求行列式以第一行展開得：

$$\begin{vmatrix} 2\,1\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,2\,1\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,2\,1\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,2\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\,0\,0\,0\,0 \cdots 0\,1\,2\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,1\,2\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,1\,2 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=2\times\begin{vmatrix} 2\,1\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,2\,1\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,2\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\,0\,0\,0 \cdots 0\,1\,2\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,1\,2\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,1\,2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$-\begin{vmatrix} 1\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,2\,1\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,2\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\,0\,0\,0 \cdots 0\,1\,2\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,1\,2\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,1\,2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

再將上式右邊的第二項（ $n-1$ ）階行列式依第一列展開，可得

$$\begin{cases} u_n=2u_{n-1}-u_{n-2} \\ u_1=2\ , \quad u_2=3 \end{cases}$$

得知 $\quad n\geqslant 2\ ,\quad (u_n)\in F$

且 $\quad \alpha=2\ ,\quad \beta=-1\ ,$

$$a=u_2=3\ ,\quad b=u_1=2$$

以及其兩相同特徵值爲 $\lambda_1=1$

故

$$u_n=\left[2+\frac{2(3)-2(2)}{2}(n-1)\right]\left(\frac{2}{2}\right)^{n-1}$$

$$u_n=1+n$$

論例3 試求下列$n\times n$行列式之值。

$$\begin{vmatrix} 1\,1\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0 \cdots 0\,0\,0\,0\,0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\,0\,0\,0\,0 \cdots 0\,1\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0\,1\,1 \end{vmatrix}$$

解：設 u_n 爲所求之n階行列式的值，仿照上例，用降階法先將所求行列式以第一行展開，再將展式中的第二項（ $n-1$ ）×（ $n-1$ ）行列式依第一列展開得

$$\begin{cases} u_n=u_{n-1}-u_{n-2} \\ u_1=1\ , \quad u_2=0 \end{cases}$$

則 $\quad (u_n)\in F$

且 $\quad \alpha=1\ ,\quad \beta=-1$

$$a=u_2=0\ ,\quad b=u_1=1$$

以及其特徵值

$$\lambda_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\ \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}-i\ \sin\frac{\pi}{3}$$

故

$$u_n=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\left[1\times1\times\sin\frac{\pi}{3}\cos(n-1)\frac{\pi}{3}\right.$$

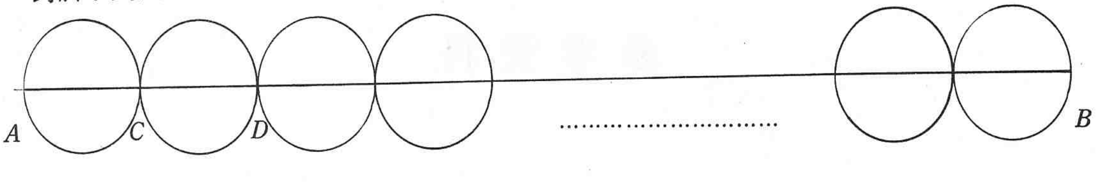
$$\left.+\left(0-1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin(n-1)\frac{\pi}{3}\right](1)^{n-2}$$

$$u_n = \cos(n-1)\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(n-1)\frac{\pi}{3}$$

或　$(u_n) = (1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, 1\cdots\cdots)$

論例4—路徑數問題

對於下列圖形

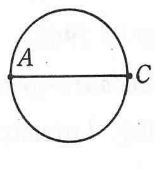


（圖中 n 個圓環併在一起，首尾相接）

若由 A 至 B 每一弧線至多經過一次，有幾種走法？但不一定每條弧線都要通過，亦不一定取捷徑。

解：由於從 A 到 B 有 n 個「圓環」，所以 A 到 B 的這些走法共有 u_n 個。

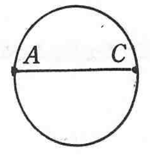
①若所走的路徑並不走遍第 1 個圓環



，則從 A 到 C 只能經過 1 條弧線，即有 3 個選擇，此從，問題就歸於由 C 到 B 的情形，故走法有

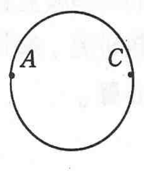
$$3\cdot u_{n-1}\quad（種）$$

②若所走的路徑走遍第 1 個圓環



，再分下面兩種情形：

(i)　先將第 1 個圓環



完全走遍後，再自 C 走到 B，故走法有：

$$(3!)\,u_{n-1}\quad（種）$$

(ii)　先從 A 到 C 只走 1 條弧線，然後就向前走到 D；此後，或繼續前進，或立即回頭，但遲早總要回到 C 點來走完第 1 個圓環。這樣的走法有：

$$(3!)\,(u_{n-1} - 3\cdot u_{n-2})\quad（種）$$

綜合上述①與②，得：

$$u_n = 3u_{n-1} + (3!)\,u_{n-1} + (3!)\,(u_{n-1} - 3\cdot u_{n-2})$$

或　$u_n = 15u_{n-1} - 18u_{n-2}$

其邊界條件：

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 9 \end{cases}$$

因此知　$(u_n) \in F$

且此處　$\alpha = 15$，　$\beta = -18$

$a = 9$，　$b = 1$

以及其兩個特徵值

$$\lambda_1 = \frac{15+\sqrt{153}}{2},\quad \lambda_2 = \frac{15-\sqrt{153}}{2}$$

由此求得

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{153}}\left(\frac{15+\sqrt{153}}{2}\right)^n\cdot\left(9 - \frac{15-\sqrt{153}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{153}}\left(\frac{15-\sqrt{153}}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{15+\sqrt{153}}{2} - 9\right)$$

或

$$u_n=\frac{1}{2\sqrt{153}}\left[\left(\frac{15+\sqrt{153}}{2}\right)^n\cdot(3+\sqrt{153})+\left(\frac{15-\sqrt{153}}{2}\right)^2(\sqrt{153}-3)\right]$$

參考資料

1. 賴東昇：再談費氏數列，科學月刊，民64年10月號。
2. 林炳炎：$\frac{1}{89}$ 奇妙的費氏數列之一，數學傳播，第六卷，第二期，民71。
3. 黃武雄：移項消去法，數學傳播，第一卷，第一期民65。
4. 林福來：離散數學初步，九章出版社，民72。
5. 謝志雄：線性代數，三民書局，民67。
6. 王懷權：數學發展史，協進圖書有限公司，民72。
7. 楊維哲：普通數學(一)，(二)；正中書局，民70。
8. Fibonacci Ouarterly. St. Mary's Colle, Californic, *Fibonacci*, Association.
9. Guelfond, A. O., *Calcul-des différences Finies*. Dunod, Paris 1963.
10. Hector Gravel *Quelques-curiosités mathématiques Vuibert*, Paris 1965.
11. Wibert *Concours-grandes écoles* 1980. Luisant (France).

—本文作者任教於延平中學—

（上接第 67 頁）

至於求 $\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}$ 極小值之類的問題，我們以爲不該出現在聯考的問題中。它不但需要繁複的計算而且要引用到不是一般學生所容易記住、瞭解的公式。對於這類問題，我們的建議是以後在試題上附上提示用什麼公式，或甚至一般把一些與考試題有關及無關的公式附在試卷，供學生必要時翻閱參考。這樣可以防止學生死記公式，背錯公式的寃枉。美國中大學生的考試也是儘量減少學生去背記公式的負擔，讓他們有更多的時間花在如何推理，如何解題。使得他們的頭腦更靈活，更懂如何推廣已有的知識來做研究，解問題。這恐怕也是撰寫本文的主要心聲。

—本文作者任教於芝加哥伊里諾理工學院—