有關 A.P.≧G.P. 的證明及一點感想

楊 重 駿

有關算術平均 $(A.P.)\geqslant$幾何平均 $(G.P.)$ 或歌西不等式的證明經常可在數播或其它國內外教育性的數學刊物讀到。因為這兩個不等式的用途非常廣，並且常用到。最近數播(29期，73年)刊登了陳文廣先生的一些證明。其中證明的技巧是很值得贊揚的。但美中不足的是仍免不了帶著歸納法的意味，因此證明除了瑣碎些外，不免有設法化成特別的形式，以便應用歸納法的原理的負擔。在此我們提供一個中學生程度所能瞭解的證明。它的特色是沒有要記形式的負擔，並且原則很簡單。這些我們都將在證明中闡明。

定理 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$，則

$$A.P. = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = G.P.$$

等號成立的充要條件為 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，即 n 個數皆相等。

證： 我們先看 $n=2$ 的情形(但不是要用歸納法！)

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} \qquad \cdots\cdots(1)$$

這是一個大家皆知的事實。我們如果把(1)式的右邊 $a_1 a_2$ 看為定值，設 $\sqrt{a_1 a_2} = k$，或 $a_1 a_2 = k^2$。那麼(1)式可以想為當兩正數 a_1, a_2 的乘積為一定時，其和 $a_1 + a_2$ 在 $a_1 = a_2 = k$ 時為最小。

我們就是利用這一觀察用到 n 個數上去，來證明我們的不等式。因給定 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 所以我們設

$$a_1 a_2 \cdots a_n = k^n,\ k \text{ 為一定值} \qquad \cdots\cdots(2)$$

我們將設法證

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant nk \qquad \cdots\cdots(3)$$

由(2)知 $a_1, a_2 \cdots a_n$，n 個數中總有數大於或等於 k 的，也總有數小於或等於 k 的。因此我們不妨設

$$a_1 \geqslant k \geqslant a_2 \qquad \cdots\cdots(4)$$

現就 a_1, a_2 間我們插入兩個數 b_1, b_2，滿足

$$a_1 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant a_2 \qquad \cdots\cdots(5)$$

及

$$a_1 a_2 = b_1 b_2 \qquad \cdots\cdots(6)$$

由(5)，得 $a_1 - a_2 \geqslant b_1 - b_2$。接著由(6)得

$$\begin{aligned}&(a_1 - a_2)^2 + 4a_1 a_2 \\ &= (a_1 + a_2)^2 \geqslant (b_1 + b_2)^2 \\ &= (b_1 - b_2)^2 + 4b_1 b_2\end{aligned}$$

因此

$$a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2 \qquad \cdots\cdots(7)$$

這說明兩個數的乘積為一定，則兩個較相近的數的和較小。

現我們取

$$b_1 = k \quad 及 \quad b_2 = \frac{a_1 a_2}{k}$$

由(7)我們得

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ \geqslant & b_1 + b_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ = & k + \frac{a_1 a_2}{k} + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned} \quad \cdots\cdots(8)$$

現 $\frac{a_1 a_2}{k} + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$ 爲 $n-1$ 個數其乘積爲 k^{n-1} 爲一定數，所以我們可仿前面的論據（必要時重排），設

$$a_3 \geqslant k \geqslant \frac{a_1 a_2}{k}$$

得

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 a_2}{k} + a_3 + \cdots + a_n \\ \geqslant & k + \frac{a_1 a_2 a_3}{k^2} + a_4 + \cdots + a_n \end{aligned} \quad \cdots\cdots(9)$$

如此繼續下去共 $n-1$ 次可得

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant k + k + \cdots + k \\ = & nk \end{aligned} \quad \cdots\cdots(10)$$

即 $\frac{a_1 + a_2 + a_n}{n} \geqslant k = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$

等式成立的充要條件很顯然是(8)、(9)等以下每一式子的等號都要成立，即

$$a_1 = k = a_2 = k = a_3 = \cdots\cdots = a_n$$

定理證畢。

讀者不妨仿效上面的證明來證下面定理。

定理　設 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$

則 $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2$

提示：設 $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = k$ 爲一定值。

另外我們要提的是有關歌西定理

$$(a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m)(b_1^m + b_2^m + \cdots + b_n^m) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^m$$

或其推廣式：

$$(a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m)(b_1^m + b_2^m + \cdots + b_n^m)(c_1^m + c_2^m + \cdots + c_n^m) \geqslant (a_1 b_1 c_1 + \cdots + a_n b_n c_n)^m$$

可由歌西定理與 $A.P. \geqslant G.P.$ 等價而證得。參看胡安衡一文（數播29期，73年）。

不少試題或數學競試的題目都期望學生利用此二不等式來解題，譬如

1. 求 $\frac{3}{\cos\theta} + \frac{2}{\sin\theta}$；$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 之極小值（72年大專乙、丁組試題）
2. 試比較 $2 + \sqrt[3]{7}$ 與 $\sqrt[3]{60}$ 之大小（70年科學才能青年選拔活動高中數學競試）。

一般介紹的解法也都是以歌西定理或其推廣式來證明，這對那些沒看過這類問題，或不熟習此些不等式的應用技巧的學生是不公平的。我們很懷疑如此是否可以測出眞正的才能？而不是比死讀、死記技巧的本領？

我們現就第2個例子提出一個較合理的解法，對兩數加以立方，及利用大家熟習的公式 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$，比較兩數大小來證明。

現 $(2 + \sqrt[3]{7})^3$
$= 8 + 7 + 3\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{7}(\sqrt[3]{8^2} + \sqrt[3]{7^2})$
$(\sqrt[3]{60})^3 = 60$

∴原式爲

$15 + 3\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{7}(\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{7})$ 與60之比較

即　$3\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{7}(\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{7})$ 與45之比較

或　$\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{7}(\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{7})$ 與15之比較　……(11)

而　$15 = (\sqrt[3]{7})^3 + (\sqrt[3]{8})^3$
$= (\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{7^2} - \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8^2})$　……(12)

所以(11)及(12)兩式變成比較

$\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{7}$ 與 $\sqrt[3]{7^2} - \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8^2}$

而此爲

$2\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{7}$ 與 $(\sqrt[3]{7})^2 + (\sqrt[3]{8})^2$

之比較。後者爲大，故 $\sqrt[3]{60} \geqslant 2 + \sqrt[3]{7}$ 等式不可能成立，∵ $\sqrt[3]{7} \neq \sqrt[3]{8}$，∴ $\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7}$。

（下轉第76頁）