上期徵答問題

優勝名單

8401　優勝名單

特優：陳力華（成功大學）
　　　余家富（建國中學）
　　　楊賢俊（成大航空）
　　　劉國獅（台大機械）

優良：顏瑞昇（台中一中）
　　　胡　鍇（成大數學）
　　　吳敏慧（台中女中）
　　　林俊吉（台中一中）
　　　潘戌衍（台中一中）
　　　王秀瑛（台大數學）
　　　林明道（省立鳳中）
　　　曾怡媚（中醫醫學）
　　　江怡德（台中一中）
　　　沈仲一　蔣廷光

良好：詩意林（淡江高中）
　　　吳學晃（新竹中學）
　　　楊穎堅（清水高中）

8402　優勝名單

良好：江旭昇（輔大數學）

問題詳解

8401　求圈圈餅體積解答

解答 I　（陳力華提供）

先在 xy 平面畫出一個半徑為 r 的圓，然後在 xyz 空間內，將所有和這個圓的距離不超過 S 的點收集起來，就有一個圈圈餅，其中 $0<S\leq r$，也就是用 $(\sqrt{x^2+y^2}-r^2)+z^2\leq S^2$ 來描述圈圈餅。

首先考慮平面上的情況。

有一塊細長的橡皮板，長 L，寬 W（如圖一假設它的材質很均勻）我們將它用力彎曲成右邊的樣子。（注意：我們是在考慮平面上的情況所以假設沒有曉起來）

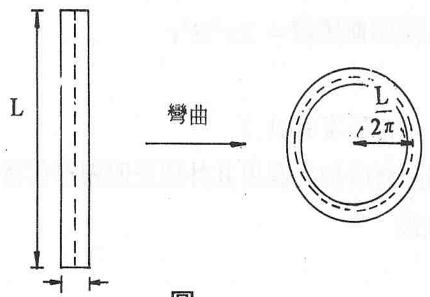


圖　一

直觀上看來，虛線並沒有伸長或縮短。虛線的外側是伸長，而虛線的內側是縮短了。

既然有伸長或縮短，我們看看面積的變化情形。

未變形前：$A=\mathrm{LW}$

變形後

$$A=\pi\left(\frac{L}{2\pi}+\frac{W}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{L}{2\pi}-\frac{W}{2}\right)^2$$

$$=\pi\left(2\cdot\frac{L}{2\pi}\cdot\frac{W}{2}+2\cdot\frac{L}{2\pi}\cdot\frac{W}{2}\right)$$

$$=\mathrm{LW}$$

我們發現：　變形前後面積是不變的。

有了以上的結論，我們回到原來的問題。

直觀上，一個圈圈餅可以從一根圓柱彎曲而來，當然圈圈餅的外側受張力，而內側受著壓力。將圈圈餅放平，我們發現：

> 對於任何一個水平切面而言，圈圈餅的切面及圓柱的切面之關係，恰好是（圖二）的關係。

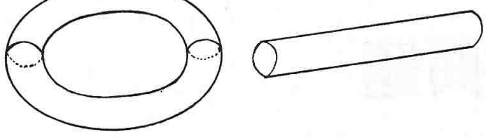


圖 二

又根據前述，兩個切面的面積是一樣的，因此我們可以推斷：

圈圈餅的體積即為圓柱的體積。

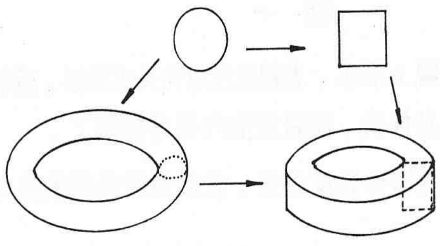
圓柱體積 $V=(\pi S^2)(2\pi r)$

$=2\pi^2S^2r$

∴圈圈餅體積 $=2\pi^2S^2r$

解答Ⅱ （余家富提供）

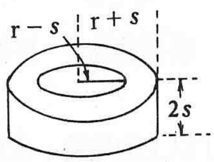
將圈圈餅所切之圓用其外切正四邊形代替成一環柱體



則 $A : B=\pi : 4$

根據題意則大環為 $r+S$，小環為 $r-S$，高為 $2S$。

$$B=2S\left(\pi(r+S)^2-\pi(r-S)^2\right)$$
$$=8rS^2\pi$$



$$\therefore A=\frac{\pi}{4}8rS^2\pi$$
$$=2\pi^2rS^2$$

8402 計算極限值解答 （余文卿提供）

因級數 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{i\left(n+\frac{1}{3}\right)}\right)^{1+\varepsilon}$ 絕對收斂，故次序可以調整，而級數為

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i\left(n+\frac{1}{3}\right)}\right)^{1+\varepsilon}+\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{i\left(n+\frac{1}{3}\right)}\right)^{1+\varepsilon}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp[-\pi i(1+\varepsilon)/2]}{(n+1/3)^{1+\varepsilon}}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp[\pi i(1+\varepsilon)/2]}{(n+2/3)^{1+\varepsilon}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2\sin\pi\varepsilon/2}{(n+1/3)^{1+\varepsilon}}+\exp[\pi i(1+\varepsilon)/2]$$
$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+2/3)^{1+\varepsilon}}-\frac{1}{(n+1/3)^{1+\varepsilon}}\right)$$

這裏用到尤拉式 $\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ 由泰勒展開式得出

$$\sin\pi\varepsilon/2=\frac{\pi\varepsilon}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)+\cdots\cdots+$$
$$\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)^n+\cdots\cdots$$

另一方面設

$$\phi_n(\varepsilon)=\frac{1}{(n+1/3)^{1+\varepsilon}}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{(x+1/3)^{1+\varepsilon}}$$

則很容易可看出 $\phi_n(\varepsilon)>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(\varepsilon)$ 收斂且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(\varepsilon)\leq 1,\ \forall\ \varepsilon>0$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1/3)^{1+\varepsilon}}=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}$

由此得到第一項的極限值是 $-\pi$，而第二項的極限值是

$$i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2/3}-\frac{1}{n+1/3}\right)$$

$$=-3i\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{3n+1}-\right.$$
$$\left.\frac{1}{3n+2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=-3i\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=-\frac{\pi i}{\sqrt{3}}$$

故最後得出極限值是 $-\pi-\pi i/\sqrt{3}$