

9102 關於SDR. (張鎮華提供)

集合序列  $(A_1, \dots, A_n)$  的一個

SDR(system of distinct repretatives)

是一個元素序列  $(a_1, \dots, a_n)$ , 使得

$a_i \in A_i$  ,  $1 \leq i < n$  , 並且所有  $a_i$  均相異。  
這方面最基本的定理是 P. Hall 定理：(  $A_1$  ,  $\dots$  ,  $A_n$  ) 有一個 SDR 的充要條件是

$|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$  , 對每一個  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  都成立。

現在假設  $|A_i| = i + 1$  ,  $1 \leq i \leq n$  。

(1) 試證 (  $A_1$  ,  $\dots$  ,  $A_n$  ) 最少  $2^n$  個相異的 SDR 。

(2) 求出 (  $A_1$  ,  $\dots$  ,  $A_n$  ) 恰有  $2^n$  個 SDR 的充要條件。