複數及其應用（下）

——楊重駿

4．有關共點、共線的複數表示條件

4.1　用複數導出三角形面積的行列式表示

設三角形 ABC 的頂點依次表示複數 z_1，z_2 及 z_3 ，又 $\angle BAC=\theta$ ，其中

$$z_j = x_j + i y_j \ ; \quad j = 1\ ,\ 2\ ,\ 3$$

（參看圖 4.1 ）。那麼，複數 $z_3 - z_1$ 除以複數 $z_2 - z_1$ 的商的虛數部份為：

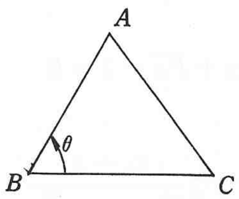

圖 4.1

$$\frac{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)}{|z_2-z_1|^2}$$

而 $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ 的虛數部份，由三角函數形式的表示可得

$$\frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}\sin\theta$$

因此我們可得下列等式：

$$\frac{(x_1-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)}{|z_2-z_1|^2}$$

$$=\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|\sin\theta$$

即

$$\frac{1}{2}\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)$$
$$-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\}$$
$$=\frac{1}{2}|z_2-z_1|\,|z_3-z_1|\sin\theta$$
$$=\Delta ABC\text{的面積}$$

但上式的右邊，又等於

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

故此行列式的絕對值為 ΔABC 之面積。

4.2　用複數表三點共線的行列式表示

我們由前面式(3.4)得知通過兩點 z_1 及 z_2 的直線表示為

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ ,\ \lambda\text{ 為實數}，-\infty<\lambda<\infty$$

由此可得

$$-\lambda=\frac{z-z_1}{z-z_2}\ \text{為一實數}$$

所以當三點 z_1，z_2，z_3 在同一直線上時，

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\overline{z_3}-\overline{z_1}}{\overline{z_3}-\overline{z_2}}\right)}=1$$

由此式立即可得

$$(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)+(z_2\overline{z_3}-\overline{z_2}z_3)$$
$$+(z_3\overline{z_1}-\overline{z_3}z_1)$$
$$=0$$

其可表成下行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix}=0$$

4.3　兩直線的交點的複數表示

設通過由 z_1 ，z_2 表示的兩點的直線為 l_1 ，通過 z_3，z_4 之直線為 l_2 ，則其方程式分別為

$$l_1\ :\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},\quad -\infty<\lambda<\infty$$

$$l_2\ :\ z=\frac{z_3+\mu z_4}{1+\mu},\quad -\infty<\mu<\infty$$

若 l_1 與 l_2 有交點 z_0，則相應的 λ_0 及 μ_0 必滿足

$$\frac{z_1+\lambda_0 z_2}{1+\lambda_0}=\frac{z_3+\mu_0 z_4}{1+\mu_0}$$

即

$$(1+\mu_0)(z_1+\lambda_0 z_2)$$
$$=(1+\lambda_0)(z_3+\mu_0 z_4)$$

上式兩邊取共軛複數，注意μ_0，λ_0皆爲實數，可得

$$(1+\mu_0)(\bar z_1+\lambda_0\bar z_2)$$
$$=(1+\lambda_0)(\bar z_3+\mu_0\bar z_4)$$

由上面兩方程式可解得λ_0及μ_0。代入l_1或l_2的任一方程式得交點z_0爲

$$z_0=\frac{(z_1\bar z_2-\bar z_1 z_2)(z_3-z_4)-(z_3\bar z_4-\bar z_3 z_4)(z_1-z_2)}{(z_1-z_2)(\bar z_3-\bar z_4)-(\bar z_1-\bar z_2)(z_3-z_4)} \tag{4.1}$$

（注意，若向量z_1-z_2與向量z_3-z_4爲平行，則上式中分母爲0，得$z_0=\infty$，在無窮遠點處相交！）

4.4 三線共點的複數的行列式表示條件

現若通過z_3，z_4的直線也與通過z_5，z_6之直線l_3相交，則我們可得一交點w_0只需在式(4.1)中把每個下指標加工就成了。現如此三線l_1，l_2，l_3共點，則由$z_0=w_0$，可得下面一對稱形式的行列式表示的充要條件：

$$\begin{vmatrix} z_1-z_2 & z_3-z_4 & z_5-z_6 \\ \bar z_1-\bar z_2 & \bar z_3-\bar z_4 & \bar z_5-\bar z_6 \\ z_1\bar z_2-\bar z_1 z_2 & z_3\bar z_4-\bar z_3 z_4 & z_5\bar z_6-\bar z_5 z_6 \end{vmatrix}=0 \tag{4.2}$$

我們也可設座標原點爲此之直線的共同交點，來檢驗此公式，此時第三列的每一個元素，分別表示由向量z_1，z_2，向量z_3，z_4，及向量z_5，z_6，所夾的平行四邊形的面積的一半，若三直線共點（皆通過原點）則所有的面積皆爲0。

在平面幾何中常遭遇到的一個情形是由一點至另一直線作垂線，即垂直關係。所以我們有必要知道：

4.5 由原點到通過兩點z_1及z_2的直線作垂線由其垂足的複數表示

首先我們知道通過z_1，z_2的直線方程式的複數表示可由三點共線的行列式表示得知如下：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z \\ \bar z_1 & \bar z_2 & \bar z \end{vmatrix}=0\text{；}\quad z\text{爲直線上任一點}$$

展開上式得

$$(\bar z_1-\bar z_2)z+(z_2-z_1)\bar z+(z_1\bar z_2-z_2\bar z_1)=0$$

其可表成爲

$$\bar P z+P\bar z-2=0 \tag{4.3}$$

其中

$$P=2\frac{z_2-z_1}{\bar z_1 z_2-z_1\bar z_2} \tag{4.4}$$

由式(4.3)可得

$$Re\,\bar P z=1 \tag{4.5}$$

現我們看看複數P（向量$\overrightarrow{OP}$）與向量$\overrightarrow{z_1 z_2}$的關係

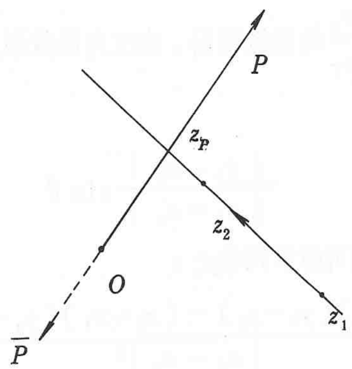

圖4.2

在式(4.4)中右邊分式裡，分母爲純虛數，所以P與複數z_2-z_1之幅角差爲$\frac{\pi}{2}$即90°，因此$\overrightarrow{OP}$表示一與向量$\overrightarrow{z_1 z_2}$垂直的向量，於是$\bar P$也爲一與複數z_2-z_1垂直的複數，現從式(4.5)中取z_P爲由原點至通過z_1，z_2的直線的垂足，於是

$$Re\,\overline{P}z_P = 1$$

但 z_P 的方向與P同方向，因此與$\overline{P}$爲反方向（參看圖4.2）。

$$Re\,\overline{P}z_P = \overline{P}z_P = 1$$

因此

$$z_P = \frac{1}{\overline{P}} \qquad (4.6)$$

式(4)所表示的就是所求的垂足的複數表示。

有了這一結果，我們就可以來證明辛姆森（Simson）線或Wallace定理。

定理4.1 設O爲三角形ABC外接圓上任一點，則由O分別向此三角形的三邊或其延線所作的垂直線的三垂足共線（參看圖4.3）。

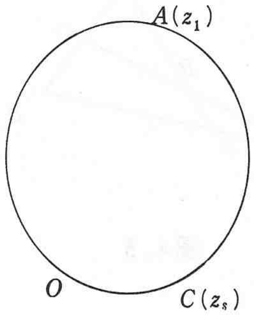

圖4.3

証： 取O爲坐標軸原點（或複平面上的原點）。z_1，z_2，及 z_3 分別爲A、B、C的複數表示。設w_1，w_2，及w_3 分別爲三垂足D、E、F的複數表示。

則 w_1 之坐標$=\frac{1}{2}\left(\frac{z_2\overline{z}_1-\overline{z}_2z_1}{\overline{z}_1-\overline{z}_2}\right)$

w_2 之坐標$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{z}_3z_2-\overline{z}_2z_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\right)$

w_3 之坐標$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{z}_1z_3-\overline{z}_3z_1}{\overline{z}_1-\overline{z}_3}\right)$

現向量

$\overrightarrow{w_1w_2}$

$$= w_2 - w_1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{z}_3z_2-z_3\overline{z}_2}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}-\frac{z_2\overline{z}_1-\overline{z}_2z_1}{\overline{z}_1-\overline{z}_2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{z_3-z_2}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}-\frac{z_1-z_2}{\overline{z}_1-\overline{z}_2}\right)\overline{z}_3$$

同樣地可得

向量$\overrightarrow{w_2w_3}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{z_1-z_3}{\overline{z}_1-\overline{z}_3}-\frac{z_3-z_2}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\right)\overline{z}_1$$

而

$$\frac{\overrightarrow{w_1w_2}}{\overrightarrow{w_2w_3}}$$

$$=\frac{(z_2-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)-(z_1-z_2)(\overline{z}_3-\overline{z}_2)}{(z_1-z_3)(\overline{z}_3-\overline{z}_2)-(z_3-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)}\cdot\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2}{\overline{z}_1}\cdot\frac{\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}$$

上式右邊第一個分式爲$\frac{\text{純虛數}}{\text{純虛數}}$之形式故爲一實數。而$\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2}{\overline{z}_1}$及$\frac{\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}$的幅角爲$\theta$及$-\theta$及$-\pi+\psi$，兩者相加爲$-\pi$，故其相乘積爲一實數。因此$\frac{\overrightarrow{w_1w_2}}{\overrightarrow{w_2w_3}}$爲一實數，所以$\overrightarrow{w_1w_2}$與$\overrightarrow{w_2w_3}$ 同方向而共點w_2。故w_1，w_2及w_3 三點共線。

註： 讀者不妨試用複數來證明幾何中的九點圓定理！

帥氏（Ceva）定理： 設z_1，z_2，z_3 三複數分別表ΔABC的三頂點，P、Q、R分別表其三邊上的三個點（如圖4.4）若下式成立：

$$\frac{AP\cdot BQ\cdot CR}{PB\cdot QC\cdot RA}=1$$

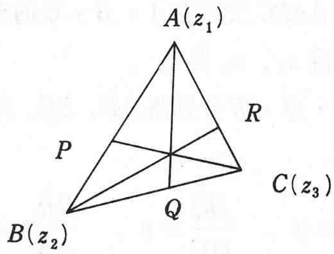

圖4.4

則連結三角形頂點與此三點之三直線共點。

証：設P點分AB之比爲u，Q點分BC之比爲v，R點分CA之比爲w，則原定理的條件即爲 $uvw=1$

令相應P點的複數

$$z_P=\frac{z_1+uz_2}{1+u}$$

相應Q點的複數

$$z_Q=\frac{z_2+vz_3}{1+v}$$

及相應R點的複數

$$z_R=\frac{z_3+wz_1}{1+w}$$

由前面三線共點的條件(4.2)我們只需驗證下面的行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} z_P-z_3 & z_Q-z_1 & z_R-z_2 \\ \bar{z}_P-\bar{z}_3 & \bar{z}_Q-\bar{z}_1 & \bar{z}_R-\bar{z}_2 \\ z_P\bar{z}_3-\bar{z}_Pz_3 & z_Q\bar{z}_1-\bar{z}_Qz_1 & z_R\bar{z}_2-\bar{z}_Rz_2 \end{vmatrix}$$

或

$$D_2=\begin{vmatrix} (1+u)z_3-(z_1+uz_2) & (1+v)z_1-(z_2+vz_3) & (1+w)z_2-(z_3+wz_1) \\ (1+u)\bar{z}_3-(\bar{z}_1+u\bar{z}_2) & (1+v)\bar{z}_1-(\bar{z}_2+v\bar{z}_3) & (1+w)\bar{z}_2-(\bar{z}_3+w\bar{z}_1) \\ (1+u)\{z_3(\bar{z}_1+u\bar{z}_2)-\bar{z}_3(z_1+uz_2)\} & (1+v)\{z_1(\bar{z}_2+v\bar{z}_3)\cdot\bar{z}_1(z_2+vz_3)\} & (1+w)\{z_2(\bar{z}_3+w\bar{z}_1)-\bar{z}_2(z_3+wz_1)\} \end{vmatrix}$$

是否爲0即可。將D_2中第一行乘以v，加上第二行及第三行乘以$\frac{1}{w}$($=uv$)相加新的行列式中第一行的元素皆爲0，故$D_2=0$。

註：(i) 讀者不妨試用帥氏定理或垂足坐標表示，證明任何三角形的三個高共點。

(ii) 試證任一三角形其三中線交於一點。

(iii) 三角形三分角線交於一點。

孟氏(Menelaos)定理 (58 A.D.)
設P、Q、R分別爲ΔABC的三邊或其延線上的三個點(參看圖4.5)，若

$$\frac{AP\cdot BQ\cdot CR}{PB\cdot QC\cdot RA}=-1$$

則P、Q、R三點共線。

証：設ΔABC三頂點A、B、C的複數坐標表示分別爲z_1，z_2及z_3。

設P、Q、R分別將AB，BC，及CA分成的比爲

$$\frac{AP}{PB}=u\ ,\quad \frac{BQ}{QC}=v\ ,\quad \frac{CR}{RA}=w$$

則所設條件爲 $uvw=-1$。今欲證在此條件下P、Q、R三點共線，今P、Q、R的複數表示分別爲

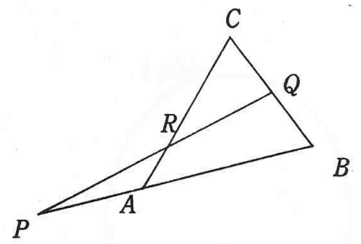

圖4.5

$$z_P=\frac{z_1+uz_2}{1+u}\ ,\quad z_Q=\frac{z_2+vz_3}{1+v}$$

$$z_R=\frac{z_3+wz_1}{1+w} \qquad (4.7)$$

而三點共線的充要條件爲

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_P & z_Q & z_R \\ \bar{z}_P & \bar{z}_Q & \bar{z}_R \end{vmatrix}=0$$

將式(4.7)代入上式左邊行列式可得

$$D^*=\begin{vmatrix} 1+u & 1+v & 1+w \\ z_1+uz_2 & z_2+vz_3 & z_3+wz_1 \\ \bar{z}_1+u\bar{z}_2 & \bar{z}_2+v\bar{z}_3 & \bar{z}_3+w\bar{z}_1 \end{vmatrix}$$

將第二行乘以$-u$及第三行乘以

$$-\frac{1}{w}(=uv)$$

加到第一行去，則第一行的元素皆爲0，故D^*，即$D=0$。原定理得證。

我們再舉另外兩個在幾何中的常用到的事實。

定理4.2 (等角定理)設AB爲圓O上兩定點，P爲此圓上任一動點，如圖4.6。則圓心角$\angle AOB=\varphi=2\angle BPA=2\alpha$

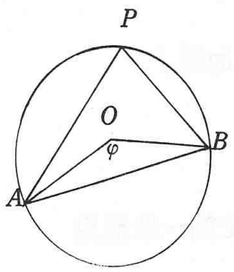

圖4.6

証：取O爲複平面的原點，B位於實軸正向

A點坐標$=re^{i\varphi}$

B點坐標$=2$

P點坐標$=re^{i\varphi}$

則

$$\overrightarrow{AP}=re^{i\theta}-re^{i\varphi}$$

$$\overrightarrow{BP}=re^{i\theta}-r$$

$$\therefore\ \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}}=\text{實數}\,e^{i\alpha}=\frac{re^{i\varphi}-re^{i\varphi}}{re^{i\theta}-r}$$

上式最後兩項兩邊取共軛數後，再考慮其商，得

$$e^{2i\alpha}=\frac{e^{i\theta}-e^{i\varphi}}{e^{i\theta}-1}\cdot\frac{e^{-i\theta}-1}{e^{-i\theta}-e^{-i\varphi}}$$

$$=e^{i\varphi}$$

$$\therefore\quad \varphi=2\alpha$$

定理4.3 (常數定理)設A爲負軸上一點,其坐標爲$(-a,0)$。由A向定圓O作任意一割線，交圓上兩點B及C，則

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\text{定值}$$

証：$z=-a+se^{i\varphi}$ 爲過A向圓所作的割線方程式；s爲A到點z的距離。其分圓$z=$

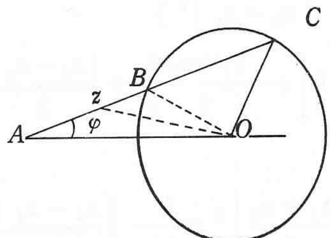

圖4.7

$re^{i\theta}$ 之交點爲

$$-a+se^{i\varphi}=re^{i\theta}$$

此式兩邊取共軛數後，兩式相乘可得

$$a^2-2as\cos\varphi+s^2=r^2$$

設s_1及s_2(即$\overline{AC}$及$\overline{AB}$)爲此方程式的兩根，則

$$s_1\cdot s_2=a^2-r^2=\text{定值}$$

5. 軌跡上的應用

有時用複數的表示來解決幾何上軌跡問題是很有功效的。

例5.1 平面上從一點A到兩定點B，C的距離的平方和等於一定值，求點A的軌跡。

解：設兩定點B，C的複數表示分別爲z_1及z_2，動點A的表示爲z，則按題所設條件，得

$$|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=k$$

k爲一常數

由複數性質：

$$2|w_1|^2+2|w_2|^2$$

$$=|w_1+w_2|^2+|w_1-w_2|^2$$

得

$$k=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2$$

$$=\frac{1}{2}(|(z-z_1)+(z-z_2)|^2$$

$$+|(z-z_1)-(z-z_2)|^2)$$

$$=\frac{1}{2}(|2z-(z_1+z_2)|^2$$

$$+|z_2-z_1|^2)$$

$$=2\left(\left|z-\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2+\left|\frac{z_2-z_1}{2}\right|^2\right)$$

所以

$$\left|z-\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2=\frac{k}{2}-\left|\frac{z_2-z_1}{2}\right|^2$$

$$=k_1^2\quad 為一定值$$

$$\therefore\quad \left|z-\frac{z_1+z_2}{2}\right|=k_1$$

由此式表明動點 z 和定點 $\frac{z_1+z_2}{2}$ 的距離為定值，所以 A 點的軌跡為以 M 為圓心，k_1 為半徑的圓。當然若

$$\frac{k}{2}-\frac{z_2-z_1}{2}{}^2<0$$

則軌跡不存在，而

$$\frac{k}{2}-\frac{z_2-z_1}{2}{}^2=0$$

時，軌跡只有一點，即線段 BC 的中點 M。

例5.2 從定點 A 向定圓 O 作任意直線 AP 交圓于點 P，求線段 AP 中點的軌跡。

解： 取定圓的圓心 O 為坐標原點，點 A 和點 O 的連線為橫軸，參看圖 5.1 。

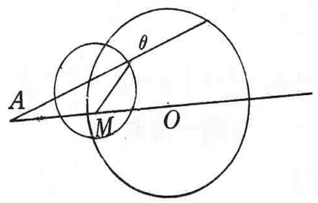

圖5.1

設 A，P 所代表的複數為 $-2a$ 及 $re^{i\theta}$，a 及 r 皆為正實常數，那麼 AP 的中點 Q 的複數 z 表示為

$$z=\frac{1}{2}\{-2a+r(\cos\theta+i\sin\theta)\}$$

$$=-a+\frac{r}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

即

$$z+a=\frac{r}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\therefore\quad |z+a|=\frac{r}{2}$$

很明顯，AO 的中點 M 表示複數 $-a$，M 為一定點，上式表示的是動點 Q 與定點 M 的距離為一常數 $=\frac{r}{2}$。也即點 Q 的軌跡為以 M 為圓心，$\frac{r}{2}$ 為半徑的圓。

6. 三角學上的一些應用

例6.1 試應用複數導出有關成等差數列各角的正弦及餘弦公式：

$$X=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+\cos[\alpha+(n-1)\beta]$$

$$=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]$$

$$Y=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+\sin[\alpha+(n-1)\beta]$$

$$=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\sin\left[\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]$$

解： $X+iY=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]+\cdots+\cdots[\cos(\alpha+(n-1)\beta)+i\sin(\alpha+(n-1)\beta)]$

設

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=u=e^{i\alpha}$$

$$\cos\beta+i\sin\beta=v=e^{i\beta}$$

則

$$\cos(\alpha+k\beta)+i\sin(\alpha+k\beta)$$
$$=e^{i\alpha+k\beta}$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos k\beta+i\sin k\beta)$$
$$=uv^k$$
$$\therefore X+iY$$
$$=u+uv+uv^2+\cdots+\cdots+uv^{n-1}$$
$$=u\cdot\frac{1-v^n}{1-v}$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot\frac{1-\cos n\beta-i\sin n\beta}{1-\cos\beta-i\sin\beta}$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot\frac{2\sin^2\frac{n\beta}{2}-2i\sin\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\beta}{2}-2i\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{n\beta}{2}-i\cos\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}-i\cos\frac{\beta}{2}}$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{n\beta}{2}+i\sin\frac{n\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}+i\sin\frac{\beta}{2}}$$
$$=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot\left[\cos\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta+i\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]$$
$$=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\cos\left(\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right)+i\sin\left(\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right)\right\}$$

比較實數及虛數部份就可得證明。

例6.2 餘弦及半角定理的推導

解： 設ΔABC的一頂點A爲坐標原點並使邊AB在橫軸的正半軸上，我們先來求餘弦定理

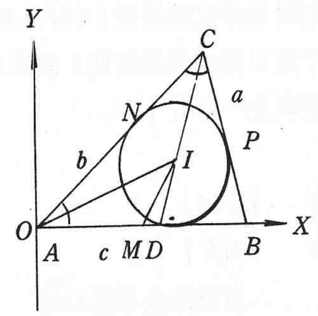

圖6.1

設a，b，c分別表ΔABC的三邊長，那麼B和C所表示的複數就分別爲

$$c\quad 及\quad b(\cos A+i\sin A)$$

于是向量$\overrightarrow{BC}$相應的複數爲

$$b(\cos A+i\sin A)-c$$
$$=(b\cos A-c)+ib\sin A$$

其長度爲

$$\sqrt{(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2}$$
$$=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$$

即餘弦定理：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

由對稱性，立即可得

$$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

下面我們證半角定理：（由於對稱性，我們只舉對$\angle A$來作證明）

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

其中

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$$

設I爲ΔABC的內心，$\angle C$的平分線交對邊於M，內切圓與OB相切于D，並設

$$2s=a+b+c$$

則由圖很容易得頂點B及C所表示的複數分別爲　c　及　$b(\cos A+i\sin A)$

現$\angle C$的平分線把對邊分成兩線段（OM及MB）其長度之比等于角C兩夾角邊的比（試用幾何或複數性質來證明此一事實！）。

所以

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{|OM|}{|MB|}=\frac{b}{a}$$

$\therefore M$點的坐標爲$\overrightarrow{OM}$

$$=\frac{0+\frac{b}{a}\cdot c}{1+\frac{b}{a}}=\frac{bc}{a+b}$$

$$\because\ \frac{|OM|}{|MB|}=\frac{|OC|}{|BC|}$$

$$\therefore\ \frac{|OM|}{|OC|}=\frac{|MB|}{|BC|}$$

$$=\frac{|OM|+|MB|}{|OC|+|BC|}$$

$$=\frac{c}{a+b}$$

因此

$$\frac{|MI|}{|IC|}=\frac{|OM|}{|OC|}=\frac{c}{a+b}$$

$\therefore I$點的坐標或複數表示爲

$$\frac{\frac{bc}{a+b}+\frac{c}{a+b}\cdot b(\cos A+i\sin A)}{1+\frac{c}{a+b}}$$

（這是利用將已知線段分成定比時分點的複數表示）

$$=\frac{bc+bc(\cos A+i\sin A)}{a+b+c}$$

$$=\frac{bc(1+\cos A)+ibc\sin A}{2s}$$

$$=\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{s}\left(\cos\frac{A}{2}+i\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\therefore\ |OI|=\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{s}$$

現原點O與頂點A重合，所以

$$|AI|=\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{s}\qquad(6.1)$$

$$\therefore\ |AI|\cos\frac{A}{2}=\frac{bc\cos\frac{2A}{2}}{s}$$

(6.2)

設 $ID=r=$內切圓半徑。因 $ID\perp OB$,所以

$$|AI|\cos\frac{A}{2}=|OD|$$

又

$$|OD|=s-a$$

（$\because 2OD+2CP+2BD=a+b+c$；$P_1$爲切點）

$$\therefore\ |AI|\cos\frac{A}{2}=s-a\qquad(6.3)$$

$\therefore$由(6.3)及(6.2)立即可得

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\qquad(6.4)$$

同樣對式(6.1)兩邊乘以 $\sin\frac{A}{2}$可得

$$|AI|\sin\frac{A}{2}=\frac{bc\sin A}{2s}$$

(6.5)

而　$$|AI|\sin\frac{A}{2}=|DI|=r\qquad(6.6)$$

及

$$\frac{bc}{2}\sin A=\Delta\ (\ \Delta ABC\text{面積}\ )$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{6.7}$$

$$\therefore\quad r=\frac{bc\sin A}{2s}=\frac{\Delta}{s}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \tag{6.8}$$

∴由(6.5)，(6.6)可得

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{|AI|}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \tag{6.9}$$

很顯然，由(6.8)及(6.4)及(6.9)可得

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$$

例6.3 求 $\sin 18^\circ$ 之值。

解：令 $1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4$ 表 $x^5-1=0$ 的5個根，它們皆位於複平面的單位圓上，參看圖6.2。今由圖可知

$$\sin 18^\circ=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}=t$$

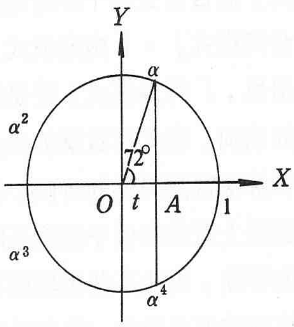

圖6.2

又 $\quad\alpha+\alpha^4=2\overline{OA}=2t$

（兩共軛複數相加） (6.10)

所以

$$\alpha^2+2\alpha^5+\alpha^8=4t^2$$

由 $\alpha^5=1$ 可得

$$\alpha^2+\alpha^3=4t^2-2 \tag{6.11}$$

又

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

（根與方程式係數的關係）

所以將式(6.10)及(6.11)代入上式得

$$4t^2+2t-1=0$$

解此方程式可得

$$t=-(1\pm\sqrt{5})/4$$

取正值，得

$$t=(\sqrt{5}-1)/4$$

註：(i) 由此也可得知正五邊形是可用尺規作出的，因 t 的值可經由有理數的平方根的及四則運算得到的。

(ii) 用上面類似的技巧可說明正九邊形不能用尺規作出（當然很早數學大師高斯在他19歲就證明一般 n 等分圓周只用尺規是不可能的，只有在 n 爲可分解爲質因數乘積，其中僅含有(i)形式爲 2^k+1 但互異的質數；(ii) 2的正整數冪次，才可行。特別他證明了二千多年來未解決的正17邊形的尺規作圖問題。從此他放棄神學、語言學等的研究，走向數學的大道）。

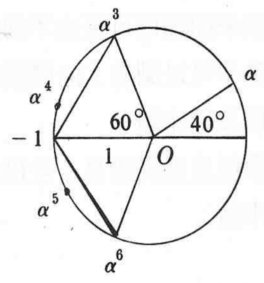

圖6.3

設 α 爲 $x^9-1=0$ 的一複數根如圖6.2。則 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots\alpha^8$ 爲 $x^9-1=0$ 的9個不同根，則

$$\alpha+\alpha^8=2t\ ,\quad t=Re\ \alpha \tag{6.12}$$

上式兩邊平方化簡可得

$$\alpha^2+\alpha^7=4t^2-2 \qquad (6.13)$$

式(6.12)與式(6.13)相乘並利用 $\alpha^9=1$ 可得

$$\alpha^3+\alpha^6=8t^3-6t$$

今由圖(6.3)可得

$$\alpha^3+\alpha^6=-1$$

故上式變成

$$8t^3-6t+1=0$$

此式中 t 無有理根(讀者不妨試證一下!)。而依較高深的理論，任一三次方程式其係數爲整數，若實根 t 爲無理數，則 t 之值不可能由尺規作出(有關此理論讀者可參考任一方程式論的書籍)。

總　結

從以上的一些例子可看出一般用複數來解決問題時所應注意的步驟爲

1. 選擇適當的坐標系。
2. 依據已知條件，求出某些點或有向線段，或動點的複數表示。
3. 根據基本定理，複數運算規則及複數的表示公式的種種推算，及關係導出結論。在軌跡問題中，由有關動點 z 的方程式中可判定出軌跡的圖形。

可見解決數學問題時可經由不同的技巧而達到，常說的數學可以訓練人的頭腦變得更靈活，是值得體驗及玩味的。

本文曾蒙楊照崑教授過目，並提供不少寶貴意見，特此申謝。

參考書籍

C. Zwikker, "*Aclvanced Plane Geometry*" North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1950.

—本文作者任教於伊里諾理工學院電機系 Chicago IL. —