幾個有名的數學問題(三)
方程式求解問題(下)

康明昌

6. Galois的生平

1832年5月30日早晨，在巴黎的一家公寓附近的池塘旁邊，一個農夫發現了一個決鬥受傷的青年Galois。Galois 立刻被送到醫院急救。第二天他就死了。如果再活幾個月，到了10月25日，他正好滿二十一歲。

不滿二十一歲的Galois，創造了Galois理論，解決了方程式根式解的問題，是群論(group theory)的眞正的締造者。他的成就在生前並沒受到賞識，直到1843年9月J. Liouville(1809～1882)才在巴黎科學院公開表揚Galois 的研究成果，而他的論文在1846年才出版。Galois 傳奇性的一生成爲某些數學傳記作者渲染的對象(註一)。他的故事甚至曾經拍了一部電影。

Évarite Galois (1811～1832)生於巴黎郊區。1823年進入預科學校，1827年2月開始選修數學課程。但是他很快的對這些教材感到厭煩，自己去尋找數學名家的原著。他唸了Legendre的幾何教本與Lagrange的主要著作，如討論Lagrange預解式的論文，Lagrange的微積分與解析函數論的講義。1828年他開始研究方程式論，數論與橢圓函數論。1829年3月出版第一篇論文，討論循環連分數的性質。

中學老師如何評量一個天才學生的學習績效呢？一個數學老師說，這個學生聰明，進步很快，但是沒有夠多的方法。另一個數學老師立刻發現他的才能，這個老師甚至說Galois絕對有資格免試進入工藝學校(École Polytechnique)就讀。工藝學校是當時法國最好的大學。

1829年當時還未滿十八歲的Galois完成

第一篇方程式論的論文。他將論文寄到巴黎科學院，A.L.Cauchy（1789～1857）是這篇論文的審查委員。根據檔案資料，Cauchy本來預備在1830年1月18日在科學院宣讀這篇論文，但是當天他生病了，因而把宣讀論文的時間延後。此後Cauchy就沒有宣讀這篇論文。不過，Galois很快的把這篇論文改寫，在1830年2月底以前寄到科學院，做爲科學院數學大獎的應徵論文。（註二）

這次數學大獎的審查委員是S.F.Lacroix, S.D.Poisson, A.M.Legender與L.Poinsot。科學院的秘書是J.Fourire，因此Galois把論文寄給Fourier。但是這篇論文丟掉了，Fourier又在這年4月死掉，他的檔案也找不到這篇文章，因此無從知道這篇論文如何遺失的。1830年6月這個數學大獎頒給已故的N.H.Abel（1802～1829）與年輕的C.G.J.Jacobi（1804～1851）。

接二連三的打擊其實早已來臨。1829年7月初Galois的父親在政敵的打擊下自殺；他是一個自由主義者。幾天之後，他在工藝學校的入學考試名落孫山，這已是第二次的落第。退而求其次，Galois只好在1829年9月到師範學校就讀（École Normale Supérieure，當時叫做École Préparatoire）。

1830年的7月革命捲走了許多年輕人，Galois却沒有被吞噬，因爲師範學校的校長把學生鎖在學校裏面。但是這却激怒了Galois。據推測，Galois在這期間，開始和激烈的共和派份子接觸，如人民之友社的人，國民防衞砲兵隊的人。12月初師範學校的校長與學生的衝突昇級，Galois寫了一封公開信攻擊校長，結果他被師範學校開除。

被開除的Galois索性加入國民防衞砲兵隊。就在這段期間，由於Poisson的建議，他在1831年1月17日寫了一篇論文寄到科學院，「Mémoire sur la résolution des équations algébriques」。Galois在方程式論的主要創見都寫在這篇論文。事後證明，巴黎科學院的院士看不懂這篇論文。

1831年5月9日，將近兩百多個共和派人士歡宴十九個被釋放的國民防衞砲兵隊的軍官。根據著名小說家大仲馬（Dumas）的回憶。

「我正和鄰座的朋友聊天的時候，突然聽到『路易菲力』（當時法國國王）的名字。接著是五、六聲噓聲。我轉過身來。離我十五到二十個座位的地方有一幕景象吸引我的注意。

一個年輕人高擧酒杯，並拿著一把匕首。他叫Évariste Galois。他是一個狂熱的共和主義者。

我認爲，這是一個威脅，並且『路易菲力』的名字被叫出來。他的意圖從亮出來的刀子不難瞭解。」

第二天他就被捕了。關了五個禮拜，六月十五日才被釋放。

1831年7月4日Galois收到巴黎科學院的回信。Poisson審查的結果說：「我們努力去瞭解Galois先生的證明。許多推論並不夠清楚，也沒有寫得讓別人能夠判斷其嚴密性。我們實在不瞭解這篇論文。原作者聲稱，這篇論文只是一個豐富的理論的一部份。通常，把一個理論完整的寫出來，其每一部份會彼此印證，這個理論也比較容易理解。因此，除非原作者把他的全部研究成果寫出來，我們實在不能對這篇論文做出一個明確的決定。」簡單的說，巴黎科學院沒有接受Galois的論文。

從今天的眼光來看，Poisson講的是實話。二十世紀的數學家J.Dieudonné曾表示（1962），Galois强調觀念性的證明（le caractére conceptuel des mathématiques），他厭惡掩蓋關鍵性想法的冗長的計算（les longs calculs masquant les idées directrices），這正是近世數學的風格。對於這種風格，十九世紀大部分的數學家是非常

陌生，尤其是專攻數學物理的Poisson。（註三）

可是Galois認爲這是另一種形式的政治迫害，是聽命於國王的科學院的院士們對他的迫害。更巧的是，Poisson，如同Cauchy，是王朝政府的忠實支持者。

1831年7月14日是巴士底節日（Bastille Day，即日後的法國大革命紀念日，復辟王朝當然不會紀念大革命）。Galois和另一個朋友全副武裝的穿著國民防衞砲兵隊的制服在逛街。當天他們就被逮捕。直到1832年4月29日才被釋放。

釋放後，他談了一次戀愛，5月30日和人決鬥。他就死在決鬥的次日。Galois究竟愛上什麼樣的女郎，他究竟跟誰決鬥，爲何決鬥，到目前爲止，並沒有明確的答案。通俗的數學傳記作者喜歡加油添醋，把這次決鬥與這位神秘女郎，和法國王朝政府的特務扯上關係。事實上，足以支持這種說法的證據是非常脆弱的。

Galois似乎預感到這是致命的決鬥。在決鬥前夜，他寫一封信給他的朋友A. Chevalier，簡述他的研究成果，方程式論與Abel積分理論。他並且在他的幾篇論文做些註釋與訂正的工作。

如果這封信講的話完全可以信賴，那麼Galois不僅創造了Galois理論與群論，他還證明了Abel積分的許多重要的結果。——B. Riemann（1826～1866）在25年後才發現這些結果。

Galois要求Chevalier，把這封信登在Revue encyclopédique，並且「請求Jacobi或Gauss公開表示他們的意見，不要管這些定理的眞實性，而是這些定理的重要性」。

Galois死後，這封信如他所要求的登出來了。可是沒有任何反應。Jacobi或Gauss也沒有表示什麼意見。1843年9月4日Liouville才在巴黎科學院公開宣揚Galois的研究成果，那篇寄給Poisson審查的論文連同一篇殘缺的論文登在1846年Liouville主編的雜誌，Journal de mathématiques pures et appliquées。Galois的不朽的貢獻和他在數學史的地位從此完全確定。

7. Galois理論的影響

由於Liouville的鼓吹，數學家開始認識Galois理論的重要性。對於大部分數學家，Galois的論文是非常深奧而難以瞭解的。J. A. Serret的「高等代數教程」（Cours d'algébre supérieure, 1849）與G. Salmon的「近世高等代數（Modern Higher Algebra, 1859）是十九世紀後半期最流行的兩本高等代數課本。Serret的書主要的目的是討論方程式論，Salmon的書主要目的是介紹不變量理論（Invariant theory）。在Serret書的第一版並沒有Galois理論，1866年Serret的書三版發行，才加入Galois理論、Galois理論從此廣泛的爲數學家理解。

即使如此，群論（group theory）是通過Galois理論的重要關頭。對許多人而言，「群」的概念是相當抽象的。1870年Camille Jordan（1838～1922）寫了一本書，「置換論」（Traité des substitutions et des équations algébriques），討論置換與Galois理論。群論的研究因此普及起來。群的概念進入數學研究的許多領域，成爲近世數學研究的新面貌之一。

Galois理論促進群論與各種變換群的研究，Galois理論本身又孕涵許多近世抽象代數的基本概念。以下我們將簡單的敍述這些發展。

1. 群論(group theory)

早在1815年Cauchy就寫了一篇有關置換群的論文，但是他的結果並不十分深刻。眞正討論群論的第一篇論文是Galois寄給Poisson審查的那篇文章。

把置換群的概念加以推廣，就得到群的概念。一個群G是一個具有一個運算$\circ$的集合：對於任意兩個元素g，$h \in G$，$g \circ h$也是G的一個元素，並且滿足以下性質。

①（結合律）$(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$，$g$，$h$，$k$是任意元素。

②（單位元素）存在一個元素e，使得 $e \circ g = g \circ e = g$，$g$是任意元素。

③（反元素）對於任意元素g，存在$h \in G$，使得

$$g \circ h = h \circ g = e$$ 。

例如，整數在加法的運算之下成爲一個群，整數在乘法的運算之下不是一個群，置換群是一個群，空間的剛體運動也形成一個群。

研究各種群的結構及其表現理論（representation theory）是非常重要的數學分枝。1980年數學家終於能夠把有限單純群加以分類。這是群論研究的一個極重要的突破。

本世紀二十年代，群被拓樸學家拿來做描述拓樸不變量的工具，這就是同調群（homology group），上同調群（cohomology group）與同倫群（homotopy group）。

2. Lie群與Erlanger綱領(Lie groups and Erlangen program)

1870年，當Jordan完成他的「置換論」不久，有兩個外國學生來到巴黎。一個是德國人Felix Klein （1849～1925），一個是挪威人Sophus Lie（1842～1899）。他們立刻成爲好朋友，他們也立刻認識到「群」的重要性

Lie想用類似Galois的方法去研究微分方程式，結果他得到Lie群（Lie groups）。所謂Lie群，是一種連續的變換群（continuous transformation group）。Lie一生研究這種群的結構與其不變量。Lie群在微分幾何學、量子力學、常微分方程式與偏微分方程式的研究都扮演非常重要的角色。

Klein把「群」的概念應用到線性微分方程式與Abel 函數的研究。他提出一個構想，他認爲，不同的幾何學其實只是不同的變換群的不變量的研究。例如，歐氏幾何是研究距量群（metric groups）的不變量，射影幾何是研究射影群（projective groups)的不變量。這就是Klein有名的Erlanger綱領（Erlanger program）。（註四）

3. 類體論(class field theory)

David Hilbert （1862～1943）把Galois 群的概念引入代數數論的研究。Galois 群作用於代數整數環的質理想。這就是Hilbert的分歧理論（ramification theory）。

在Hilbert之前，L. Kronecker（1823～1891）與H. Weber （1842～1913）對於Galois群與代數數論的關係已有相當的認識。所謂的Kronecker-Weber定理證明，有理數Q的任意Abel 擴張體都是某一個$Q(\zeta_n)$的子體，其中$\zeta_n = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$。Weber對於類體（class field)更有相當深刻的認識。Hilbert把類體的研究提到一個更高的地位。Hilbert的第12問題就是討論類體Abel多樣體（abelian variety）與自守函數（automorphic function）的相互關係。

4. 近世抽象代數(modern abstract algebra)

Galois 除了創造了群論之外，近世抽象代數裏面「體」（field）的概念在 Galois 的論文也可略見雛形，他甚至還創造了有限體（finite field），並且討論有限體上的射影線性群（projective linear groups over finite fields）。

事實上十九世紀後半期的許多有名的代數學家都在Galois 理論下過功夫，並且得益不少。意大利數學家E.Betti在1851年就開始研究Galois理論。C. Jordan研究Galois理論的結果是更深入的瞭解線性群（general linear groups）。L.Kronecker與R.Dedekind在介紹Galois理論時，引入「體」的概念；H.Weber證明更多的「群」與「體」的重要性質。

此外 Galois 的思考方式也促進抽象代數的誕生。Galois 非常反對盲目的冗長的計算，他認爲，只有掌握關鍵性的概念才能得到簡潔的證明，也才能洞見那些複雜的計算過程的由來。這正是日後的P.G.L.Dirichlet（1805～1859）與R.Dedekind（1831～1916）所一再强調的。抽象代數的創始人 Emmy Noether（1882～1936）與Emil Artin（1898～1962）就是從這裏吸取養料的。

5.其他

Galois 理論的方法論對於數學家是一個很好的啟示。拓樸學家研究覆蓋面（covering spaces）與基礎群（fundamental groups）的關係，其結果正好和子體與Galois群的關係相彷彿。Liouville用Galois的手法研究微分方程式，這個方向成爲線性代數群（linear algebraic groups）的一個來源。

此外，還有不少有名的問題與 Galois 理論有密切的關係，如Hilbert關於任意有限群是否都可以變成任意代數數體的Galois群（I.R.Shafarevich，1954），Noether 關於有理函數體的不變體是否仍爲有理函數體（R.G.Swan，1969）。

8. Sturm法則

大學教程的「方程式論」是以 Galois 理論爲主，高中數學的「方程式論」却是處理另外一些問題，如：

1.代數基本定理：任意的n次複數係數方程式恰有n個複數根。（證明請參閱L.V. Ahlfors, Complex analysis, 2^{nd} edition，122頁；或P.Samuel, Algebraic theory of numbers, 44頁。）

2.根與係數的關係。（註五）

3.對稱式：x_1，x_2，……，x_n 的任意對稱多項式都可以表示成基本對稱式σ_1，σ_2，……，σ_n 的多項式，其中$\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_n$，$\sigma_2 = \sum_{1\leq j_1<j_2\leq n} x_{j_1}x_{j_2}$，$\sigma_3 = \sum_{1\leq j_1<j_2<j_3\leq n} x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}$，……，$\sigma_i = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_i\leq n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_i}$，…，$\sigma_n = x_1x_2\cdots\cdots x_n$。

4.Cardano公式與Ferrari公式。

5.Lagrange內插公式：若a_1，……，a_n是相異n個數，b_1，……，b_n是任意n個數，則存在唯一的$n-1$次多項式$f(x)$，滿足$f(a_i)=b_i$，$i=1$，2，……，n。事實上，$f(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \prod_{j\neq i} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}$。（註六）

6.行列式（determinant）與結式（resultant）。（註七）

7.實係數方程式根的上、下界。

8.秦九韶——Horner 近似根求法，Newton近似根求法。（請參考，「數學分析導引

」上册，241～244 頁與 245～247 頁，「凡異出版社」出版。）

9. Descartes 符號法則，Fourier —— Budan 法則，Sturm法則。

以下我們僅就 Sturm 法則做詳細討論。

8.1 實係數方程式實數根的數目

問題：(1)方程式 $x^4+12x^2+5x-9=0$ 有多少正實根？

(2)更一般的，任給實係數方程式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$，任給 a，$b\in R$。試問 $f(x)=0$ 在〔a，b〕有多少（實數）根？

在十七世紀，René Descartes（笛卡爾，1596～1650）找到一個估計實數根數目的方法。J. Fourier （1768～1830）早在1797年以前就找到一個更精確的估定方法，不過他只是把這個方法教給他的學生，並沒有把它寫成論文發表出來。1803年Budan 獨立的發現同樣的方法（註八）。因此我們把這個方法叫做Fourier —— Budan 法則。

在介紹Descartes 法則與Fourier —— Budan 法則之前，我們先定義變異數的概念。

有限數列｛1，－2，$-\frac{1}{2}$，4｝的符號依次是＋－－＋。其中第一項與第二項的符號改變，第三項與第四項的符號也改變，我們就說｛1，－2，$-\frac{1}{2}$，4｝的變異數是2。考慮另一個有限數列｛1，0，－2，－4，0，3｝，我們先把零去掉，再考慮其變異數，因此這個數列的變異數是2。

以方程式 $x^5-2x^3-4x^2+3=0$ 為例，取出其係數｛1，0，－2，－4，0，3｝，其變異數是2，因此其正根的數目（重根要計算其重數）是 $2+2l$，其中 l 是某個整數。同理，方程式 $3x^3-x-1=0$，其係數的變異數是1，所以正根的數目是 $1+2l$，其中 l 是某個整數。現在我們可以敘述Descartes 符號法則如下：

Descartes 符號法則：若實係數方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$ 的正根數目（重根要計算其重數）是N，而v是｛a_n，a_{n-1}，……，a_1，a_0｝的變異數，則 $v\geqslant N$，且 $v-N$是一個偶數。

Fourier — Budan法則比Descartes符號更能準確的估計實數根的數目。以方程式 $f(x)=x^3-7x-7=0$ 為例，我們要估計$f(x)=0$在（3，4）之間根的數目（重根要計算其重數）。令$f^{(1)}(x)$是$f(x)$ 的一階導函數，$f^{(2)}(x)$是$f(x)$的二階導函數，$f^{(3)}(x)$是$f(x)$的三階導函數。設 v_3 是｛$f(3)$，$f^{(1)}(3)$，$f^{(2)}(3)$，$f^{(3)}(3)$｝的變異數，v_4是｛$f(4)$，$f^{(1)}(4)$，$f^{(2)}(4)$，$f^{(3)}(4)$｝的變異數，故 $v_3=1$，$v_4=0$。詳細計算如下，

x	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	變異數
3	−1	20	18	6	1
4	29	41	24	6	0
−2	−1	5	−12	6	3
−1	−1	−4	−6	6	1

Fourier — Budan 法則說，方程式$f(x)=0$在（3，4）之間根的數目是 $v_3-v_4-2l=1-2l$，其中 l 是零或某個正整數；方程式$f(x)=0$在（－2，－1）之間有 $v_{-2}-v_{-1}-2l=2-2l$ 個根，其中 l 是零或某個正整數；方程式$f(x)=0$在（－1，3）之間有 $v_{-1}-v_3-2l=-2l$ 根,其中 l 是零或某個正整數。把這個法則完整的敘述如下

Fourier — Budan 法則：考慮n次的實係數方程式$f(x)=0$，且$f(a)$，$f(b)\neq 0$（$a<b$）。令v_a是｛$f(a)$，$f^{(1)}(a)$，

……，$f^{(n)}(a)$ } 的變異數，v_b 是 { $f(b)$，$f^{(1)}(b)$，……，$f^{(n)}(b)$ } 的變異數，N 是 $f(x)=0$ 在 (a，b) 之間根的數目 (重根要計算其重數)，則 $v_a \geqslant v_b$，$v_a - v_b \geqslant N$，且 $v_a - v_b$ 是一個偶數。

我們不準備證明Descartes符號法則與Fourier—Budan 法則。這些證明並不困難，讀者可以自已做或參考，「數學分析導引」(上册)，250～251 頁，「凡異出版社」出版。

8.2　Sturm法則

Charles Sturm (1803～1855) 是一個瑞士人，不過他很早就到巴黎定居。Sturm 在數學史上以研究物理數學的偏微分方程聞名，這就是所謂的Sturm—Liouville 理論。據Sturm 說，他在研究偏微分方程時，有許多靈感是來自他過去研究實係數方程式根的分布所累積的經驗。事實上他在 1929 年就提出 Sturm 法則，完全解決實係數方程式根的分布問題。Galois 在數學圈認識的朋友本來不多，而 Sturm 就是這少數人中的一個。據說，Galois 在知道 Sturm法則的內容之後，他在幾分鐘內就給出一個證明。

以方程式 $f(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$ 爲例。

令 $f_0(x)=f(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$，

$f_1(x)=f'(x)=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的導函數，

$f_0(x)=q_1(x)f_1(x)-f_2(x)$，
$\deg f_2 < \deg f_1$，

$f_1(x)=q_2(x)f_2(x)-f_3(x)$，
$\deg f_3 < \deg f_2$，

……………………

$f_3(x)=q_4(x)f_4(x)-f_5(x)$，
$\deg f_5 < \deg f_4$。

故 $f_2(x)=66x^3-150x^2+172x+61$，$f_3(x)=-464x^2+1135x+723$，$f_4(x)=-32599457x-8486093$，$f_5(x)=-1$。

我們想計算 $f(x)=0$ 在 (1，3) 之間根的數目。因爲 $f_5(x)=-1$ 是 $f_0(x)=f(x)$ 與 $f_1(x)=f'(x)$ 的最大公約式，故 $f(x)=0$ 沒有重根。注意，$f(1)$，$f(3) \neq 0$。

令 v_1 是 { $f_0(1)$，$f_1(1)$，$f_2(1)$，$f_3(1)$，$f_4(1)$，$f_5(1)$ } 的變異數，v_3 是 { $f_0(3)$，$f_1(3)$，$f_2(3)$，$f_3(3)$，$f_4(3)$，$f_5(3)$ } 的變異數。則 $v_1=2$，$v_3=1$。Sturm 法則說，$f(x)=0$ 在 (1，3) 之間根的數目恰好是 $v_1-v_3=1$。

所謂Sturm法則可以敘述如下：

Sturm法則 (簡單形式) ：令 $f(x)=0$ 是沒有重根的 n 次實係數方程式，且 $f(a)$，$f(b) \neq 0$ ($a<b$)。我們要計算 $f(x)=0$ 在 (a，b) 之間根的個數。定義

$f_0(x)=f(x)$，$f_1(x)=f'(x)$，

$f_0(x)=q_1(x)f_1(x)-f_2(x)$，
$\deg f_2 < \deg f_1$，

$f_1(x)=q_2(x)f_2(x)-f_3(x)$，
$\deg f_3 < \deg f_2$，

……………………

$f_{s-2}(x)=q_{s-1}(x)f_{s-1}(x)-f_s(x)$，$\deg f_s < \deg f_{s-1}$，

$f_{s-1}(x)=q_s(x)f_s(x)$。

令 v_a 與 v_b 各爲 { $f_0(a)$，$f_1(a)$，…，$f_s(a)$ } 與 { $f_0(b)$，$f_1(b)$，……，$f_s(b)$ } 的變異數。則 $v_a \geq v_b$，且 $f(x)=0$ 在 (a，b) 之間根的數目恰好是 v_a-v_b。

Sturm 法則 (一般形式) ：令 $f(x)=0$ 是任意 n 次實係數方程式，且 $f(a)$，$f(b) \neq 0$ ($a<b$)。定義

$$f_0(x)=f(x)\ ,\ f_1(x)=f'(x),$$
$$f_0(x)=q_1(x)f_1(x)-f_2(x),$$
$$\deg f_2<\deg f_1\ ,\ f_2\neq 0$$
$$f_1(x)=q_2(x)f_2(x)-f_3(x)\ ,$$
$$\deg f_3<\deg f_2\ ,\ f_3\neq 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{s-2}(x)=q_{s-1}(x)f_{s-1}(x)-f_s(x)$$
$$\deg f_s<\deg f_{s-1}\ ,$$
$$f_s\neq 0\ 。$$
$$f_{s-1}(x)=q_s(x)f_s(x)\ 。$$

令 $g_0(x)=\dfrac{f_0(x)}{f_s(x)}$ ，$g_1(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_s(x)}$ ，……，$g_s(x)=\dfrac{f_s(x)}{f_s(x)}=1$ ，且 v_a 與 v_b 各爲 $\{g_0(a)\ ,\ g_1(a)\ ,\cdots\cdots,\ g_s(a)\}$ 與 $\{g_0(b)\ ,\ g_1(b)\ ,\cdots\cdots,\ g_s(b)\}$ 的變異數。則 $v_a\geqslant v_b$ ，且 $f(x)=0$ 在（ a ， b ）之間根的數目恰好是 v_a-v_b（重根只計算一次）。

我們現在要證明簡單形式的 Sturm 法則。至於一般形式的 Sturm 法則的證明，讀者不妨自己做做看，或參考：N. Jacobson , Basic Algebra I，295～299頁，協進圖書公司翻印本。先注意以下兩件事，

(1)若 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ ，則 α 不可能是 $f_i(x)=f_{i+1}(x)=0$ 的公解，其中 $i=0$ ，1 ，……，$s-1$ 。

因爲，設 $f_i(\alpha)=f_{i+1}(\alpha)=0$ ，則 $f_{i-1}(\alpha)=q_i(\alpha)f_i(\alpha)-f_{i+1}(\alpha)=0$ ，同理 $f_{i-2}(\alpha)=\cdots\cdots=f_1(\alpha)=f_0(\alpha)=0$ 。故 α 是 $f(x)=f'(x)=0$ 的公解，這與 $f(x)=0$ 沒有重根的假設違反。

(2)若 $f_i(\alpha)=0$ ，其中 $1\leqslant i\leqslant s-1$ ，則 $f_{i+1}(\alpha)=-f_{i+1}(\alpha)$

因爲 $f_{i+1}(\alpha)=g_i(\alpha)f_i(\alpha)-f_{i+1}(\alpha)=-f_{i+1}(\alpha)$ 。

我們開始證明Sturm 法則。

第一步驟：讓 x 由 a 變化到 b ，考慮 $f_i(x)$ 的符號變化的情形，$1\leq i\leq s-1$ 。注意，$f_s(x)$ 是 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 的公因式；因 $f(x)=0$ 沒有重根，故 $f_s(x)$ 恒爲常數。

假設 $f_i(x)$ 由 $x=\alpha$ 的左邊到右邊變了符號，則 $f_i(\alpha)=0$（勘根定理）。設 $\varepsilon>0$ 是足夠小的正數，則 f_{i-1} ，f_i ，f_{i+1} 的符號變化不出以下四種情形：

	$\alpha-\varepsilon$	α	$\alpha+\varepsilon$	$\alpha-\varepsilon$	α	$\alpha+\varepsilon$	$\alpha-\varepsilon$	α	$\alpha+\varepsilon$	$\alpha-\varepsilon$	α	$\alpha+\varepsilon$
f_{i-1}	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	−
f_i	+	○	−	+	○	−	−	○	+	−	○	+
f_{i+1}	−	−	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+

說明：由於 $f_i(x)$ 在 $x=\alpha$ 變號，故 $f_i(\alpha-\varepsilon)$ ，$f_i(\alpha)$ ，$f_i(\alpha+\varepsilon)$ 的符號是+○+或−○−。因爲 $f_i(\alpha)=0$ ，利用注意事項(1)與(2)，可知 $f_{i-1}(\alpha)$ ，$f_{i+1}(\alpha)$ 的符號是+−或−+。因爲 $\alpha-\varepsilon$ 與 $\alpha+\varepsilon$ 都足夠靠近 α ，故 $f_{i-1}(\alpha-\varepsilon)$ ，$f_{i-1}(\alpha+\varepsilon)$ 的符號與 $f_{i-1}(\alpha)$ 一致；同理，$f_{i+1}(\alpha-\varepsilon)$ ，$f_{i+1}(\alpha+\varepsilon)$ 的符號也和 $f_{i+1}(\alpha)$ 一致。

由上表可知，$\{f_{i-1}(x)$ ，$f_i(x)$ ，$f_{i+1}(x)\}$ 的變異數恆爲 1 ，不管 x 是 $\alpha-\varepsilon$ ，α ，或 $\alpha+\varepsilon$ 。

第二步驟：讓 x 由 a 變化到 b ，考慮 $f_0(x)$ 的符號變化的情形。

因爲 $f(x)=0$ 只有單根，如果 α 是 $f(x)=0$ 的根，則 $f(x)=(x-\alpha)\cdot g(x)$ ，其中 $g(\alpha)\neq 0$ 。因此 $g(x)$ 在 $x=\alpha$ 附近不改變符號（勘根定理）。所以 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 附近一定要改變符號。同時，因爲 α

是單根，故 $f'(\alpha)\neq 0$，可知 $f_1(x)=f'(x)$ 在 $x=\alpha$ 附近不改變符號。這些觀察結果可歸納如下：

	$\alpha-\varepsilon$	α	$\alpha+\varepsilon$	$\alpha-\varepsilon$	α	$\beta+\varepsilon$	$\alpha-\varepsilon$	α	$\alpha+\varepsilon$	$\alpha-\varepsilon$	α	$\alpha+\varepsilon$
f_0	+	○	−	+	○	−	−	○	+	−	○	+
f_1	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	−

但是第一與第四個表是不可能發生：因爲，在第一表中，$f_1(x)=f'(x)>0$，故 $f_0(x)=f(x)$是增加函數，可知$f(\alpha-\varepsilon)>0>f(\alpha+\varepsilon)$ 是不可能的。

因此，$\{f_0(x), f_1(x)\}$的變異數，在$x=\alpha-\varepsilon$時比$x=\alpha+\varepsilon$恰好多 1 。也就是，每通過一個$f(x)=0$的根，變異數就少 1 。

綜合第一與第二步驟，可知$v_a\geqslant v_b$，且 v_a-v_b 恰好是$f(x)=0$在(a, b)之間根的個數。(註九)

9. 多元高次聯立方程式

代數基本定理和 Galois 理論出現之後，我們可以說，一元方程式的求解問題已經告一段落。接下來的問題是多元方程式的求解。

方程式$-xy^7+x^5y^2+2x^5y-x^3y-3x+1=0$ 有多少解呢？從解一元方程式的經驗，我們知道，所謂的「解」最好把它解釋成「複數解」，否則很可能沒有解。重新整理這個方程式，得$(y^2+2y)x^5-y\cdot x^3-(y^7+3)x+1=0$ 。令y爲任意複數，我們得到x的五次或三次方程式，由此解出x。因此，原方程式有無窮多個解。同理，令y爲任意複數，得到x的五次或三次方程式，頂多只有五個數值滿足此方程式；因此，有無窮多組數(a, b)不滿足原方程式。

由此可見我們不可能把方程式$-xy^7+x^5x^2+2x^5y-x^3y-3x+1=0$ 的解一一列舉。研究這個方程式所有解的性質，一個相當有效的辦法是把這些解看成代數曲線上的點，進而研究這個代數曲線的各種性質。例如，把$x^2+y^2-1=0$的解看成(複數)圓上的點，則其實數解可以表示成$(\cos\theta, \sin\theta)$，$0\leq\theta\leqslant 2\pi$ 。同理，把Fermat 問題 $x^{23}+y^{23}=1$的(複數)解看成Fermat 曲線$x^{23}+y^{23}-1=0$上的所有點。我們希望透過這種幾何討論來探討多元方程式的解的各種性質。

問題：是不是任意兩個代數曲線都相交？或者，換另一種說法，是不是任給兩個二元高次方程式，我們都有辦法判斷其是否有公解？在有公解的時候，我們能不能求出這些公解？並且，這些公解有什麼規律性？

解決這個問題的辦法，就是結式(resultant)。求兩個多項式的結式是消去理論(elimination theory)的基本技巧。消去理論是早期研究代數幾何(algebraic geometry)的主要工具。爲了更進一步發展消去理論，同時也爲了避免消去理論中繁複的計算，數學家建立了交換代數的理論(commutative algebra)。代數幾何與交換代數在二十世紀中非常蓬勃的發展。

9.1 結 式

方程式$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$與$g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2=0$什麼時候有公根？

令$x=\alpha$是一個公根，考慮 $\alpha\cdot f(\alpha)=f(\alpha)=\alpha^2\cdot g(\alpha)=\alpha\cdot g(\alpha)=g(\alpha)=$

$=0$，即

$$
\begin{aligned}
a_0\alpha^4+a_1\alpha^3+a_2\alpha^2+a_3\alpha \quad &=0\\
a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3 &=0\\
b_0\alpha^4+b_1\alpha^3+b_2\alpha^2 \quad &=0\\
b_0\alpha^3+b_1\alpha^2+b_2\alpha \quad &=0\\
b_0\alpha^2+b_1\alpha+b_2 &=0
\end{aligned}
$$

以上的一次聯立方程式有異於零的公解（α^4，α^3，α^2，α，1），故其係數行列式爲零。令$R(f,g)$爲其係數行列式，則

$$
R(f,g)=\det\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\
b_0 & b_1 & b_2 & & \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & \\
 & & b_0 & b_1 & b_2
\end{pmatrix}
$$

由以上的討論可知，若$f(x)=g(x)=0$有公根，則$R(f,g)=0$。$R(f,g)$叫做多項式$f(x)$與$g(x)$的結式。

反之，若$R(f,g)=0$，則$f(x)=g(x)=0$有公根或$a_0=b_0=0$。（註十）

一般的時候，若$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}x+a_m$，$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n$，定義

$$
R(f,g)=\det\begin{pmatrix}
a_0\ a_1\cdots a_m & & \\
 & a_0\cdots\cdots a_m & \\
 & \cdots\cdots\cdots & \\
 & & a_0\cdots\cdots\cdots a_m\\
b_0\ b_1\cdots b_n & & \\
 & b_0\cdots\cdots b_n & \\
 & \cdots\cdots\cdots & \\
 & & b_0\ b_1\cdots\cdots b_n
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n\text{ 列}\\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m\text{ 列}
\end{array}
$$

那麼，$R(f,g)=0$的充分必要條件是$f(x)=g(x)=0$有公根或$a_0=b_0=0$。

現在我們利用結式求聯立方程式$f(x,y)=(y^2+2y)x^2-y\cdot x-y^7+1=0$，與$g(x,y)=x^3-(y^3-2y)x+3=0$的公解。

若（a，b）是其公解，以$y=b$代入。得$(b^2+2b)x^2-b\cdot x-b^7+1$與$x^3-(b^3-2b)x+3$有公因式，故其結式爲零，即

$$
\det\begin{pmatrix}
b^2+2b & -b & -b^7+1 & & \\
 & b^2+2b & -b & -b^7+1 & \\
 & & b^2+2b & -b & -b^7+1\\
1 & 0 & -b^3+2b & +3 & \\
 & 1 & 0 & -b^3+2b & +3
\end{pmatrix}=0
$$

如果把y看成常數，求$R(f,g)$。則$R(f,g)$是一個y的多項式。以上的討論說明，如果(a,b)是$f=g=0$的公解，則$R(f,g)(b)=0$。反之，若$R(f,g)(b)=0$，則必可找到一個數a，使得$f(a,b)=g(a,b)=0$。

如果我們考慮的聯立方程式有更多變數或更多方程式，我們就要稍微修改以上的方法。這就是習稱的Kronecker消去法。讀者可參考舊版的B. L. Van der Waerdew, Modern Algebra 的第二册第11章。

9.2 代數曲線

從方程式$f(x,y)=0$，我們考慮代數曲線$\{(a,b)\in C^2: f(a,b)=0\}$。這是落在複數平面的曲線。例如，$x^2+y^2=-1$在實數平面$\boldsymbol{R}^2$沒有點，但是在複數平面却是名符其實的曲線。

正如直線的情形，在複數平面上兩條相異直線可能相交於一點，也可能不相交（平行）。爲了使我們的討論結果具有規律性，我們應該考慮複數射影平面CP^2。同樣的，代數曲線的討論也應該放在複數射影平面。

所謂複數射影平面的點是（$z_0:z_1:z_2$），其中z_0，z_1，z_2是不全爲零的複數。我們把（$z_0:z_1:z_2$）與（$w_0:w_1:w_2$）看成同一點，如果可以找到$\lambda\in C\setminus\{0\}$，使得$w_i=\lambda z_i$，$i=0,1,2$。複數平面可以看成複數射影平面的一部分，即把點（$x$，

y）看做（$1:x:y$）。因此，曲線 $x^{23}+y^{23}=1$ 其實是射影曲線 $z_1^{23}+z_2^{23}-z_0^{23}=0$ 的一部分（$x=\frac{z_1}{z_0}$，$y=\frac{z_2}{z_0}$）。射影平面曲線是由任一個均勻多項方程式 $F(z_0, z_1, z_2)=0$ 所定義的。

若 $f(x, y)$ 與 $g(x, y)$ 是互質的多項式，則 $f(x, y)=g(x, y)=0$ 至多有 $m\cdot n$ 個公解（應計算重根的重數），其中 $m=\deg f$，$n=\deg g$。這個定理放在射影平面來看，具有更高的規律性：若 $F(z_0, z_1, z_2)$ 與 $G(z_0, z_1, z_2)$ 是互質的均勻多項式，則射影平面曲線 $F(z_0, z_1, z_2)=0$ 與 $G(z_0, z_1, z_2)=0$ 恰有 $m\cdot n$ 個交點（應計算重數），其中 $m=\deg F$，$n=\deg G$(Bezout 定理)。

代數曲線的研究其實與Riemann 曲面（Riemann surface）的研究是一致的。代數曲線與代數曲面的研究，在十九世紀後半期與二十世紀初期德國與意大利的數學家已經獲得很深入的結果。更高維度的代數流形（algebraic varieties）的研究是近代代數幾何探討的對象。

10. 中國數學家的貢獻

中國古代的數學建立在籌算（宋金元之前）與珠算的基礎。在這基礎，方程式求解問題的研究在宋金元時代達到最高峯。其代表人物是秦九韶（1202～1261，南宋人）、李冶（1192～1279，金末元初人）和朱世傑（約1260～1320，元人）。他們的主要成就是，聯立同餘方程式，一元高次方程式的近似根，立方程解問題的代數學方法，多元高次聯立方程式。（註十一）

10.1 聯立一次方程式與大衍求一術

「周髀算經」與「九章算術」是現存的最早的中國數學典籍。「周髀算經」成書約在100年BC～100年AD。「九章算術」成書時代不詳，但是經張蒼與耿壽昌的整理，大致已成定本；張蒼（250？～152 B.C.）秦末漢初人，耿壽昌（73～49 B.C.）西漢宣帝時人。

「九章算術」已經知道使用消去法，解三元一次聯立方程式。「張邱建算經」（約484年，南北朝元魏時代）甚至知道兩個三元一次方程式可以有三組解。但是一般的處理方法似乎沒有人研究。

「孫子算經」（約67～270年成書)有一個問題，解聯立同餘方程式 $x\equiv 2 \pmod 3$，$x\equiv 3 \pmod 5$，$x\equiv 2 \pmod 7$。顯然，這是和天文學上的問題有關。但是「孫子算經」的作者並沒有說明解法的原理。

聯立同餘方程式的一般解法是秦九韶發見的，這個方法世稱「大衍求一術」，目前西方數學書稱之爲「Chiness remainder theorem」。秦九韶甚至還考慮模數之間有公因子的情形。

10.2 增乘開方術

求近似根的原理（倍根、減根）已經出現在「九章算術」。「九章算術」可以求 $x^2=55225$ 與 $x^3=1,860,867$ 的近似根。「周髀算經」與「張邱建算經」討論過 $x^2+Ax=B$ 的根（$A, B>0$）。唐代王孝通（七世紀）考慮 $x^3+Ax^2+Bx=C$ 的解（$A, B, C>0$），可是沒有留下計算過程。

北宋仁宗時代賈讓（約1050）發現一種新的開平方與開立方的方法。推廣這種方法，他還可以開 n 次方，其中 n 是任意正整數。賈

讓的高次開方法叫做「增乘開方術」。賈讓的方法包含有，綜合除法與Pascal三角形（Blaise Pascal, 1623～1662）。賈讓的方法實際上和Horner 求近似根的方法並無兩樣。

劉益（約1080年）推廣賈讓的方法，可以解以下方程式的近似根：$x^2-12x=864$，$-5x^2+228x=2592$，$-3x^2+228x=4320$，$-5x^4+52x^3+128x^2=4096$。

「數書九章」是秦九韶的傳世之作。在這裏他有系統的說明求一元高次方程式近似根的方法。他把這個方法叫做「正負開方術」。在他的書中出現的方程式有，$-x^4+763,200x^2-40,642,560,000=0$，$0.5x^2-152x-11,552=0$，$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^2-11,664x^2-34,992=0$。

10.3 天元術

十三世紀初河北與山西南部的太行山東西兩麓是繁榮的商業文化中心。有許多學者居住在這一帶，如，蔣周、李文一，石信道、劉汝諧、元裕。他們研究出立方程解問題的代數學的方法。這就是習稱的「天元術」。這些研究成果只有李治的著作流傳後世。

所謂「天元」就是把一次項用「元」標出，把常數項用「太」表明。因此，方程式$ax^2+bx+N=0$ 記為

N	太
b	元
a	

日後朱世傑改良他們的方法，他可以求以下方程式的有理根（不只是近似根）：$121x^2-7056=0$，$24x^3-31x^2-55x-12818=0$，$576x^4-2640x^3+1729x^2+3960x-1695252=0$。

10.4 四元術

朱世傑是宋、金、元數學集大成的人物。他有系統的研究消去法，發展出高次聯立方程式的解法。這就是「四元術」。所謂四元，就是四個未知數，天元（x），地元（y），人元（z）和物元（u）。

四元術把常數項（太）記在中央，其餘項數的位置如下：

			⋮			
…………			u^2	…………		
y^3u	y^2u	yu	u	uz	uz^2	uz^3
y^3	y^2	y	太	z	z^2	z^3
		xu	xyz			
xy^3	xy^2	xy	x	xz	xz^2	xz^3
x^2y^3	x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2	x^2z^3
…………			x^3	…………		

朱世傑可以解的聯立方程式有，(1) $x-2y+z=0$，$2x+2y-u=0$，$x^2+y^2-z^2=0$，$-xy^2+xz-x^2+2x+4y+4z=0$；(2) $-x-y-xy^2-z+xyz=0$，$x-x^2-y-z+xz=0$，$x^2+y^2-z^2=0$；(3) $y+z=9$，$x^2+y^2=z^2$，$xy(x+y-z)=24$。主要的消去法有四種，

①「內外行乘積相消」（交叉相乘法），如在方程式$(7+3z-z^2)x+(-6-7z-3z^2+z^3)=0$與$(13+11z+5z^2-2z^3)x+(-14-13z-15z^2-5z^3+2z^4)=0$消去$x$。

②「互隱通分相消」。在方程式$A_2y^2+A_1y+A_0=0$與$B_2y^2+B_1y+B_0=0$，先消去y^2項，得$C_1y+C_0=0$。再與原方程式聯立。

③「剔而消之」。朱世傑沒有詳細說明這個方法。後人有一種解釋如下：給定方程式

$A_2y^2+A_1y+A_0=0$與$B_2y^2+B_1y+B_0=0$，消去常數項，得$C_2y^2+C_1y=0$，故$C_2y+C_1=0$（假設$y\neq 0$）。

④「人易天位」。例如在三元聯立方程式消去y項（地元），將x改寫成y，z改寫成y，方程式本身不變，因爲天元術中二元聯立方程式的標準型是以天元（x）、地元（y）表示。

10.5 亂世中的數學家

秦九韶（1202～1261）是南宋普州安岳人（四川安岳）。十八歲時關中兵變，波及四川，他組織鄉里武裝力量保衞地方。三十五歲時（1236）元兵入四川，他往江南避難。秦九韶是熱衷名利的人，爲官貪暴，多交豪富，奔走奸相賈似道門下。性極機巧，星象、音律、算術、營造、駢麗詩詞、遊戲、弓劍毬馬，都很精通。遺著「數書九章」是在兵荒馬亂的生涯中完成的（1247）。

李冶（1192～1279）生於北京，二十九歲擧金朝進士。蒙古人控制華北後，避難到山西崞縣，後又隱居於河北元氏縣。他的著作有「測圓海鏡」（1248）與「益古演段」(1259)。「測圓海鏡」以直角三角形及其內切圓、旁切圓的性質闡明天元術的方法，「益古演段」是爲初學者寫的天元術入門書籍。

朱世傑（約1260～1320）是燕山（北京附近）人，曾到江南遊歷。他繼承北方數學的成就（天元術），並吸收南方商用數學的成果。著有「算學啟蒙」（1299）與「四元玉鑑」（1303）。他的成就象徵中國籌算數學的巔峯。

值得注意的是，秦九韶、李冶、朱世傑的研究成果與當時社會的實際需要並沒有太密切的關係。「天元術」只在沙克什的「河防通議」（1321）見到，而這種水利上的應用原來只是一個二次方程式。當時民間流行的是商用數學，南宋楊輝的「楊輝算法」是最通行的教本，「楊輝算法」含有三部分：「乘除通變本末」（1274）、「田畝比類乘除捷法」（1275）、「續古摘奇算法」（1275）。楊輝還著有「詳解九章算法」（1261）與「日用算法」（1262）。

從另一個角度來看，一次聯立方程式的消去法在中國雖然發展得很早，却沒有產生「行列式」的理論。負數的概念也是很早就引入，却不能認識負根的需要（註十二）。可能是不强調數學理論的探討，「增乘開方術」沒有發展出Cardano或Ferrari 公式，「四元術」沒有產生結式的方法，「大衍求一術」也沒有誘導出數論的理論。中國古代數學的成就是輝煌的，但是也有欠缺的一面。

註 釋

註一：E. T. Bell 的書，「Men of Mathematics」，把Galois描寫得像傳奇小說中的英雄。參考資料 4. 與 5. 對此有非常權威性的考證。Bell 這本書寫得通俗有趣，但是充滿不少錯誤和偏見。

註二：根據參考資料 5，Taton 推測，Cauchy 可能認爲這篇論文有資格競爭數學大獎，因此他沒有在科學院下個會期宣讀它，並且勸 Galois 把它加以改寫，好投到科學院應徵。

註三：即使這樣的替Poisson設身處境的辯護，難道當時巴黎科學院找不到一個人能夠看懂這篇論文嗎？事實上，巴黎科學院似乎沒有能力賞識眞正有才能的數學家。在 Galois 之前，Abel 也被科學院忽略過。當時巴黎科學院的院士們的研究態度，Abel曾經這樣描述：「每個人只關心自己的問題，毫不留意別人的研究成果。大家只想講，却沒有人願意

聽。」像射影幾何的開山祖師V. Poncelet 在當時（復辟時期）也無法出頭。

註四：請參考，康明昌，幾個有名的數學問題(二)：古希臘幾何三大問題（下），第5.4.節，「數學傳播季刊」8卷3期，73年9月。

註五：這是法國數學家Francois Viéte（1540～1603）發現的。

註六：習題，請讀者利用Lagrange內插公式或部分分式分解，證明以下的Euler公式。

若$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 是相異n個數，則

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^m}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)} = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0\leq m\leq n-2 \\ 1, & \text{若 } m=n-1 \end{cases}。$$

註七：G. W. Leibniz在1693年定義行列式，E. Bezout在1764年建立線性聯立方程式的理論。十八世紀的數學家，如G. Cramer, L. Euler，P. S. Laplace，已經會運用行列式。但是許多行列式的基本定理都是A. L. Cauchy 做出來的。然而，最早使用行列式的（1683年），却是日本數學家關孝和（Seki Takakazu，1642？～1708）。關孝和除了發現行列式之外，他還發現連分數、某些Diophantus方程式的解、求極大極小值、多項式的微分與判別式、Newton近似根求法、Bernoulli數、Pappus-Guldin 定理。

註八：Ferdinand Francois Désiré Budan de Boislaurent （生卒年不詳，約活動於1800～1853）是法國的一個醫生。數學只是他的業餘興趣。據近代的數學史家Judith V. Grabiner指出，以一個業餘數學家Budan 仍然能夠發現一個正確的定理，顯示在十九世紀初期，沒有受過科班訓練的業餘數學家還能對數學研究有所貢獻；可是這種情形很快就改觀了，職業數學家幾乎獨占所有的數學研究的成果，並且，除了二十世紀印度的天才數學家Srinivasa Ramanujan（1887～1920）之外，沒有受過正統訓練的人也很難證明一個好定理。

註九：以上證明的書寫形式曾參考黃敏晃等人編著的「高中數學教本」第六冊（數理出版公司）。

註十：$R(f,g)$是xf，f，x^2g，xg，g的係數行列式。若$R(f,g)=0$，則這些「列向量」是線性相依，故存在不全為零的係數B_0, B_1, A_0, A_1, A_2，滿足$B_0xy+B_1f+A_0x^2g+A_1xg+A_2g=0$，故$(B_0x+B_1)f=-(A_0x^2+A_1x+A_2)g$。如果$\deg f=3$且$\deg g=2$，則$f$與$g$不可能互質。

註十一：為了讀者的方便，以下是幾個關鍵性的歷史年代：靖康之難1127年，金朝於1115～1234年在中國北方立國，忽必烈即位1260年，蒙古兵攻陷臨安1276年。

註十二：清朝李銳曾討論正負根的數目。

參考資料

1. A. Clark, *Element of abstract algebra*, Wadsworth Publ. Comp, Belmont, CA, 1971.
2. H. M. Edwards, *Galois theory*, Springer GTM no. 101, New York, 1984.

3. M. Kiernan, The development of Galois theory from Lagrange to Artin, Arch. *History Exact Sci*. 8 (1971) 40～154。

4. T. Rothman, Genius and biographers: the fictionalization of Évariste Galois, *Amer. Math. Monthly* 89 (1982) 84～106.

5. R. Taton, Évariste Galois and his contemporaries, *Bull. London Math. Soc*. 15 (1983) 107～118.

後記：本系列文章初稿承蒙李國偉、張國男與朱樺諸先生多方指教，特此誌謝。

（本文作者任教於台灣大學數學系）