邊長爲整數的三角形

林克瀛

筆者以前曾在「數學傳播」七卷二期上報導過有人證明下述的定理：在所有以整數爲邊長的三角形中，面積正好等於三邊總長之半的三角形，只有一個，就是3－4－5直角三角形。最近一期的趣味數學季刊上，有一位荷蘭讀者W. A. Van der Spek 投書指出這一個證明既非新發現又不簡潔。在「美國數學月刊」八十卷六期六九一頁中，加拿大Wilfrid Laurer 大學的王子俠先生（E. T.H. Wang）首先提出一個更普遍的問題，後來被荷蘭艾豪文工藝學院（Technological Institute of Eindhoven）的O. P. Lossers 用不到一頁的篇幅解決了。王先生的題目是：

找出所有邊長爲整數的三角形，其中每一個的面積，都和三邊總長相等。

把一個三角形每一邊的長都乘以二，則面積比原來的大四倍。因此，每一個三邊都是偶數的王氏三角形，把每一邊除以2後，就得到一個面積爲總邊長之半的三角形。

設王氏三角形三邊長爲 x_1，x_2，x_3，半週長爲

$$s=(x_1+x_2+x_3)/2$$

我們要解下面的方程式（x_i 是整數）

$$2s=s(s-x_1)(s-x_2)(s-x_3) \qquad \cdots\cdots(1)$$

令 $y_i=2(s-x_i)$，$i=1,2,3$ 代入(1)式，並且利用 $y_1+y_2+y_3=2s$，可得

$$y_1y_2y_3=16(y_1+y_2+y_3) \cdots\cdots(2)$$

式中 y 是正整數。

由於 $y_j+y_k=x_i$，$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ 依序輪換，可知 y_1，y_2，y_3 具有相同的奇偶性。由(2)式可知一定都是偶數。令 $y_i=2z_i$ 可得

$$z_1z_2z_3=4(z_1+z_2+z_3)$$

或者改寫成

$$\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}+\frac{1}{z_1z_2}=\frac{1}{4}$$

上式中 z 都是正整數。

在不失去普遍性之下，我們可以設

$$z_1\leqslant z_2\leqslant z_3$$

上式顯示 $4\leqslant z_1z_2\leqslant 12$

因此 $1\leqslant z_1\leqslant 3$

現在我們只要檢查少數的可能結果，這樣可找出五個解：

z_1	1	1	1	2	2
z_2	5	6	8	3	4
z_3	24	14	9	10	6

x_1	29	20	17	13	10
x_2	25	15	10	12	8
x_3	6	7	9	5	6

所有五個解都代表三角形，前三個是鈍角三角形，後二個是直角三角形。只有最後一個解中每一邊都是偶數。（本文取材自 *J. Recreational Mathematics*, Vol 15(4), 1983，P.277）

—本文作者現任敎於清大物理系—