算術和數論中的「難 題」挑戰

王湘君

本文譯自 Stanley J. Bezuszka & Margaret J. Kenney：
Challenges for Enriching the Curriculum：Arithmetic and Number Theory, Math. Teacher, April 1983, pp. 250～252.

“數學是科學之后，而算術是數學之后。”這是最偉大數學家之一的高斯在 1856 年宣稱的。事實上，數論被著名的數學家和熱心的業餘愛好者追求了好幾個世紀了。數論有如此的魅力，其理由很簡單——它是個人可獨自研究和有成就感的最佳資源。每一個學生，特別是有創見的學生都應該揭穿數論裡所產生的各種問題。在這裡提供兩種類型的題目，供有興趣的讀者參考。——這些都是針對某些數和加強數論中某些觀念的。有一些題目是爲了推廣研究計算機專用的。

一、數

(A) 廻文數

一個數被稱爲廻文數，是因正讀反讀均相同的數。例如 464 ，5005 ，以及 11111 等都是廻文數。

1. 找出 9 個五位廻文數，使它們的和仍爲一個五位廻文數。

解： 99999=10001+10101+11111
+11011+10201+11211
+12021+12121+12221

推廣： 34543 ，請找出所有兩個或三個五位廻文數，使它們的和等於 34543 。是否有兩位、三位或四位廻文數，而它們的和等於 34543 ？

2. 從 1 開始有 9 個一位廻文數。那麼有多少個二位，三位，四位，…，n 位廻文數？

解：

表 1

位　數	廻文數的個數
1	9
2	9
3	$9\cdot10$
4	$9\cdot10$
⋮	⋮
$2n-1$	$9\cdot10^{n-1}$
$2n$	$9\cdot10^{n-1}$

推廣： 比一百萬小的廻文數有多少個？比

一兆小的迴文數又有多少個？

(B) 三角形數

三角形數是指三個數，它們的相關長度可形成一個三角形。例如（5，5，5）就是一個等邊三角形數。（2，3，4）是一個不等邊的三角形數，而（1，2，3）就不是一個三角形數。

3. 請看表2，並完成它。算一算由已給的數，可以做成多少個各種三角形。

表 2

已　知　數	等邊三角形	等腰但不等邊三角形	三邊不等三角形	合計
1，2，3	3	4	0	7
1，2，3，4				
1，2，3，4，5				
1，2，3，4，5，…，n				

解：已知長度爲1，2，3，…，n，則有 n 個等邊三角形，至於其他三角形，我們須區別 n 是偶數還是奇數。解答列於表 3 。

表 3

	三等邊三角形	二等邊三角形	三邊不等三角形	合　計
$n=2m$	$3m^2-2m$	$\dfrac{m(4m-5)(m-1)}{6}$	$\dfrac{m(4m+5)(m+1)}{6}$
$n=2m+1$	$3m^2+m$	$\dfrac{m(4m+1)(m-1)}{6}$	$\dfrac{(m+2)(4m+3)(m+1)}{6}$

(C) Narcissistic數（narcissistic原意是自我陶醉的，此處沒有恰當的譯文）

一個narcissistic 數是能用組成自己的數字，按照已定的順序，利用數學運算的結合來表達自己。例如

$$43=4^2+3^2,\quad 81=(8+1)^2$$

它們的和124，$=(1\times 2)^7-4$，這些都是narcissistic 數。

4. 利用數學運算＋，－，×，÷，！，乘冪，開方，盡可能地把小於100的 narcissistic 數找出來。

解：　$27=(\sqrt{2+7})^3$

以及　$39=(3!)^2+\sqrt{9}$

二、數的概念

(D) 餘　數

在這裡我們可以不用計算機就能算出各種除法問題的餘數，包括數字很大的除法。

5. $1^n+2^n+3^n+4^n$，當 $n=1$ 時，我們有 $1+2+3+4=10$ 被 10 除餘 0，找出所有的自然數 n，使 $1^n+2^n+3^n+4^n$ 能被 10 整除。

解：表 4 告訴我們，$1^n+2^n+3^n+4^n$ 能被 10 整除的 n 是一個非 4 的倍數的數。

6. 找出第 27 個Mersenne 質數，$2^{44497}-1$，（此數共 13395 位數）被 7 除的餘數。

解： 2 的乘冪被 7 除的餘數，形成下列的循環。

表 4

指數 n	被 10 除的餘數				餘數總和
	1^n	2^n	3^n	4^n	
1	1	2	3	4	0
2	1	4	9	6	0
3	1	8	7	4	0
4	1	6	1	6	4
5	1	2	3	4	0
6	1	4	9	6	0
7	1	8	7	4	0
8	1	6	1	6	4

$2^1, 2^4, 2^7, 2^{10}, \cdots, 2^{3n-2}$　餘 2

$2^2, 2^5, 2^8, 2^{11}, \cdots, 2^{3n-1}$　餘 4

$2^3, 2^6, 2^9, 2^{12}, \cdots, 2^{3n}$　餘 1

$2^{44497} = 2^{3(14833)-2}$

是屬於餘 2 的那一組，所以 $2^{44497}-1$ 被 7 除餘 1 。

推廣：我們來考慮著名的費氏數列 1，1，2，3，5，8，13，⋯，研究一下它們的各項餘數。例如求第 1000000 項被 2，3，5 或 7 除的餘數。

(E) 正整數的分佈

我們把正整數排列成方形、三角形、或其他有趣的形狀，某些排列是非常巧妙精緻的。

7. 從 1 開始儘可能地分配連續的正整數為兩列，使在同一列中沒有一數是其他兩數的和。例如，圖 1 就符合這條件。但圖 2 就能排出更多的數來。

1	3	5
2	4	

圖 1

1	2	4	8
3	5	6	7

圖 2

我們把這規則推廣到三列、四列去。

1，2，4，8，11，22

3，5，6，7，19，21，23

9，10，11，12，13，14，15，16，17，18，20

25，50，63，以及上面的第一列

51，52，53，64，65，66　以及上面的第二列

54，55，⋯，62　以及上面第三列

24，26，27，⋯，49

(F) 在矩形中，數的概念

繪一些矩形在格子紙上，然後畫出它的一條對角線。數一數對角線通過的單位正方形有幾個？在圖 3 是 2×3 的矩形，對角線通過 4 個單位正方形。2×6 的矩形中，對角線通過 6 個單位正方形。

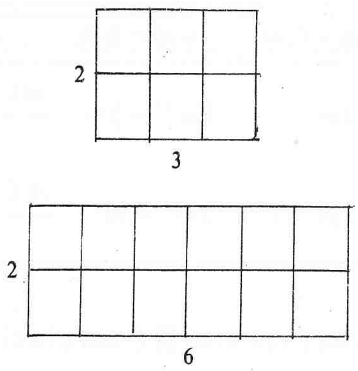

圖 3

8. 對任意 $n\times m$ 矩形，找出對角線通過的單位正方形有幾個？

解：圖 3 提示我們 $2+3-1=4$，$2+6-2=6$。一般化的解答應為 $n+m-G.C.F(n,m)$，$G.C.F(n,m)$ 表 m、n 的最大公因數。

數論的領域是無界的，各位讀者有興趣的話，不妨自己去開創一片天地，然後去對付那裡產生的問題。

—本文作者任教於師大附中—