8302 積分問題（余文卿提供）

設 k 是大於 8 的正整數，而 $\theta \neq n\pi$（$n \in Z$），求積分值

$$\int_0^{\infty} \frac{\mu^{k-4}\, d\mu}{(\mu^2 - 2\mu i \cos\theta + \sin^2\theta)^{k-3/2}},$$

$(i = \sqrt{-1})$

解答：（余文卿提供）

此題須用到較深的積分理論，如

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^k} = \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k)\, a^{k-1/2}}$$

（$a > 0$ 或 a 的虛部不爲零）

上面式子中 $\Gamma(x)$ 即是階乘函數，定爲

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt$$

當 k 是正整數時，$\Gamma(k) = (k-1)!$，又

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ 且滿足方程式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$。

設 $z = x + iy$ 是一複數，而

$$z_1 = \frac{(\cos z + \sin\theta)}{(-\sin z + \cos\theta)}$$

考慮積分

$$I = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{k-4}\, dx\, dy}{\left(\left[\frac{(z-\overline{z_1})}{2i}\right]\left[-\sin\theta\, z + \cos\theta\right]\right)^{k-1}}$$

直接計算得

$$I=\left(\frac{2i}{-\sin\theta}\right)^{k-1}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^{k-4}\,dx\,dy}{(x^2+y^2+1-2yi\cot\theta)^{k-1}}$$

$$=\left(\frac{2i}{-\sin\theta}\right)^{k-1}\frac{\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k-1)}$$

$$\cdot\int_0^{\infty}\frac{y^{k-4}\,dy}{(y^2+1-2yi\cot\theta)^{k-3/2}}$$

$$=\frac{(-2i)^{k-1}\sin\theta\,\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k-1)}$$

$$\cdot\int_0^{\infty}\frac{u^{k-4}\,du}{(u^2-2ui\cos\theta+\sin^2\theta)^{k-3/2}}$$

$$\left(u=\frac{y}{\sin\theta}\right)$$

現考慮另一種算法。這積分的區域是上半平面：$z=x+iy$，$y>0$，經由有名的 Cayley 轉換 $w=(z-i)(z+i)^{-1}$，積分區域變成圓盤 $|w|\leqslant 1$，而 I 變成

$$I=4\bar{\lambda}^{k-1}\int_{|w|\leq 1}\frac{(1-|w|^2)^{k-4}(1-w)(1-\bar{w})\,dw}{(1-\bar{\lambda}^2|w|^2)^{k-1}}$$

$(\lambda=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta)$。

這積分用極坐標 $w=re^{i\zeta}$ 可很快算出

$$I=4\bar{\lambda}^{k-1}\int_0^1\frac{(1-r^2)^{k-4}\,r\,dr}{(1-\bar{\lambda}^2r^2)^{k-1}}$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}(1-re^{i\zeta})(1-re^{-i\zeta})\,d\xi$$

$$=4\bar{\lambda}^{k-1}2\pi\int_0^1\frac{(1-r^2)^{k-3}\,r\,dr}{(1-\bar{\lambda}^2r^2)^{k-1}}$$

$$=\frac{4\pi\bar{\lambda}^{k-1}}{1-\bar{\lambda}^2}\int_0^1 v^{k-3}\,dv\quad\left(v=\frac{(1-r^2)}{(1-\bar{\lambda}^2r^2)}\right)$$

$$=\frac{4\pi\bar{\lambda}^{k-1}}{(k-2)(1-\bar{\lambda}^2)}$$

比較並化算得出積分值是

$$\frac{2^{-k+4}\,i^k\,\bar{\lambda}^k\,\Gamma(k-2)\,\pi}{(1-\bar{\lambda}^2)^2\,\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$