複數及其應用（上）

楊重駿

1. 導 言

數學的發展是隨著其理論或實際的需要而飛躍的。開始人計算、量度只用正整數，後來加上分數及負整數。這些統稱之爲有理數。漸漸人們又發覺光是有理數仍不足以解決 $x^2=2$ 之類的簡單方程式：幾何上 $\sqrt{2}$ 表示一個兩邊長爲1的直角三角形的斜邊長。這樣的一個長度就不是有理數，其他如圓周率 π，自然對數的底 e 等皆不可能是有理數（當然它們的證明，並不簡單！）。如果把一條直線 l 固定其一點爲原點，而向左右兩端無限延伸，則所有有理數的值都可在一取定的單位長度下及利用直尺刻劃在此直線上。又任何兩個有理數之間必存在有一有理數介於其間（譬如 a，b 爲兩有理數，則 $\frac{a+b}{2}$ 必介於 a，b 之間），這也顯示有理數是稠密地分布在直線 l 上的，所謂稠密是直覺上的一種說法。我們想像空氣是到處存在於空間但仍有空隙存在。把上面提及的一些非爲有理數的數稱爲無理數。這也表明有理數並不能把直線 l 塡滿，這些新的數推想必可相應于直線 l 上某一點，而由於有理數的稠密性，所以每個無理數似可由有理數無限制地逼近。由此觀念，用收斂的有理數序列而定出了所有的實數，其包括有理數及無理數兩類，而且如此得到的實數系是完備的了，即它們和直線 l 上的點成爲一一對應的關係，沒有任何間隙存在，也即任何有限的實數列的極限仍爲一實數，不可能也不需要引進新的數來塡充了。

實數的完備性並不能保證可以解答所有可能產生的問題。最簡單的一種情況是由於實數的基本性質是任何實數的平方恆非爲負，所以 $x^2+1=0$ 就無實解，人們爲了代數學中解方程式的問題而引進了虛數：一種非實數的數。人們定滿足 $x^2+1=0$ 的根爲 i 稱爲虛數，因此 $i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$。

事實上是在 16 世紀時相傳求出三次方程式公式解的卡爾當（Cardano）在解決一個二次式 $x^2-10x+40=0$ 引進了解 $x_1=5+\sqrt{15}\,i$ 及 $x_2=5-\sqrt{15}\,i$。他當初認爲這兩個表達式沒什麼意義，是虛構的，但他仍寫下來，並把負數的平方根起名叫“虛數”。

有了虛數，自然會涉及和實數的結合形式，如 $a+bi$，其中 a，b 皆爲實數，稱 i 爲複數，一種非實非虛的數。所有複數組成的集叫複數域通常以 C 表之。有了複數之後，人們就可以證明代數學上的一基本理論，即任何一 n 次多項式必有 n 個根（包括重根的重複度算在內，除了這個重大理由外，複數在數學其它部門，物理或工程應用上都被廣泛地用到。目前由於電腦輔助作圖的廣泛應用，有關多邊形或一些特殊曲線的特殊性及其變動的實際討論都有依賴複數的幾何性質得以較淸楚地解說及瞭解。而複數之所以可以用於實際，這與它以及它的運算幾何表示有關。另外最重要的一點就是對幾何問題的證明，往往可以不經由作輔助線而可直接得到證明，所以我們先就複數其代數、三角、幾何等的表示及其一些基本運算的幾何意義作介紹，然後分別就其在三角、幾何、軌跡的應用作介紹，因一般學生只學複數而不習慣應用它解各式各樣的問題。希望此文能引起讀者今後多加利用複數的性質來解決問題。

2. 複數的一些表示及其基本運算性質

複數的表示有若干種，一般形式爲 $z=x+yi$；x，y 皆爲實數，又稱之爲代數形式；x 稱爲 z 的實數部份，y 爲 z 的虛數部份，有時以 $Re z=x$，$Im z=y$ 表之。如在平面上先選定一直角坐標系 X，Y 爲其坐標軸（X 稱爲實軸，Y 稱爲虛軸）則 z 就可以 $z=(x,y)$ 或用點 $P(x,y)$ 或者向量 $\overrightarrow{OP}$ 來表示，參

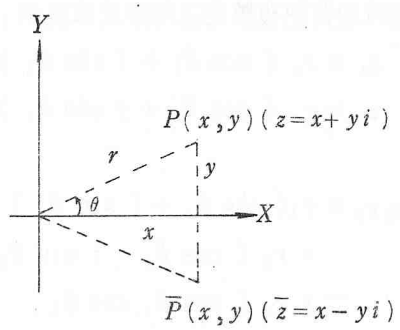


圖2.1

看圖2.1。我們不妨把一個複數看作平面上的一點，而其運算以向量的性質進行。

複數 z 與點 $P(x, y)$ 或向量 $\overrightarrow{OP}$ 有 1－1 相對應的關係（所謂 1－1 相對應是指不同的複數相應不同的點或向量）。

兩複數 $z_1 = x_1 + y_1 i$

與 $z_2 = x_2 + i y_2$

相等之充要條件為

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

點 P 或向量 $\overrightarrow{OP}$ 就是複數 z 的幾何表示或幾何形式，因此我們可以把相對應的複數 $z = x = yi$，點 $P(x, y)$ 及向量 $\overrightarrow{OP}$ 相互代替。現根據圖2.1可見若向量 $\overrightarrow{OP}$ 的長度為 r，它和 X 軸的正向所夾的角 θ，則由三角函數的定義可得

$$\left\{\begin{array}{ll} x = r\cos\theta; & \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ y = r\sin\theta; & \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{array}\right. \qquad (2.1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2.2)$$

于是

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (2.3)$$

上式叫做 z 的三角函數式，或三角形式，r 叫做 z 的模數，記作 $|z|$，θ 叫做 z 的幅角。注意如果 $z \neq 0$，則把 z 的幅角增加 2π 的任何整數倍，向量 $\overrightarrow{OP}$ 不改變其原來的方向。

設 e 為自然對數底，則由事實

$$Re\, e^{i\theta} = \cos\theta \quad 及 \quad Im\, e^{i\theta} = \sin\theta$$

即 $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

可得

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

這是所謂的指數形式。

註： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 目前雖然是記號形式，但事實上這是個恒等式，不過它的證明超出高中生的程度。

由此並可得 $e^{i\theta + 2n\pi i} = e^{i\theta}$；$n$ 為整數。所以在理論上一個複數 z 的幅角有無窮多個值，它的一般形式為 $\theta + 2k\pi$（k 為任何整數），為說明及計算方便起見，我們稱介於 0 與 2π 之間的幅角 θ 為 z 幅角的主値，以 $\theta = \arg z$ 表之。

在圖2.1中與點 $P(x, y)$ 關於橫軸對稱的點 $\overline{P}(x, y) = x - yi$ 稱為點 P 或 $z = x + yi$ 的共軛複數，通常以 $\overline{z}$ 表之。很明顯的，此時 $\overline{z}$ 的模數仍為 $|z| = r$，但幅角為 $-\theta$，因此 $\overline{z}$ 的三角函數式表示為

$$\begin{aligned} \overline{z} &= r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] \\ &= r(\cos\theta - i\sin\theta) \end{aligned}$$

2.1 複數加法和減法的幾何解釋

$$\begin{aligned} &(x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) \\ &= (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i \end{aligned}$$

其幾何意義：兩複數的和與差在複平面上表示兩向量的和與差。

在代數或物理上已經知道，如果複數 z_1，z_2 分別對應于向量 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，那麼以這兩個向量為邊作平行四邊形 OP_1QP_2 其對角線 $\overrightarrow{OQ}$ 所表示的向量就是與兩複數和 $z_1 + z_2$ 相對應的向量，而另一條對角線 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 所表示的向量，則為兩複數差 $z_1 - z_2$ 相對應的向量，參看圖2.2，這也是所謂的平行四邊形法則。利用此法則可求出二個以上的複數的和的表示。這就變成所謂多邊形法則。如何實施此一推廣？我們得先就二個向量和的情形再作一番解析。

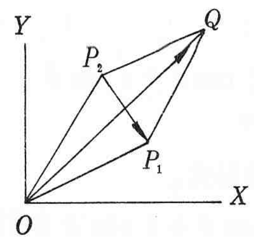


圖 2.2

在圖 2.2 中，如果把向量 $\overrightarrow{OP_2}$ 的起點 O 平移到 P_1 的位置，則它的終點 P_2 就移到 Q 的位置，也就是說向量 $\overrightarrow{OP_2}$ 就變成了向量 $\overrightarrow{P_1Q}$，而且兩者爲相等的，即 $\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{P_1Q}$ 。我們把由原點出發的向量叫做位置向量，而把由其它點出發得到的相等向量叫做自由向量。有了自由向量的概念，我們可先作出和複數 z_1 相對應的向量 $\overrightarrow{OP_1}$，再由 P_1 點作和複數 z_2 對應的自由向量 $\overrightarrow{P_1Q}$，這樣向量 $\overrightarrow{OQ}$ 就和複數 z_1+z_2 相對應了，這個法則又叫做三角形法則。至於二個以上複數和的多邊形法則就變成是使第二個複數所對應的向量的起點與第一個複數所對應的向量的終點重合，第三個複數對應的向量起點與第二個複數對應的向量的終點重合，如此進行下去，這樣第一個向量的起點與最後一向量的終點所連成的有向線段所表示的複數就是所求之和。

例如圖 2.3 中 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdots\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ 依次表示複數，那麼

$$\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\cdots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

爲複數 $z_1+z_2+\cdots+z_n$ 的表示。

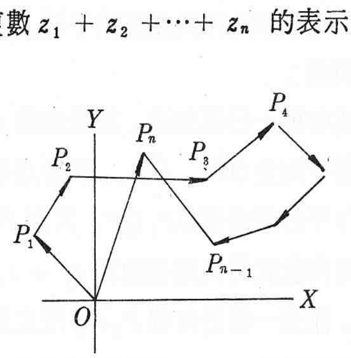


圖 2.3

2.2 複數乘法的幾何解釋

這時通常把複數用三角形式來表示，設

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

則

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\\&\quad\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2\\&\quad-\sin\theta_1\sin\theta_2\\&\quad+i(\cos\theta_1\sin\theta_2\\&\quad+\sin\theta_1\cos\theta_2))\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)\\&\quad+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

這表明兩個複數（或若干個複數）相乘時，積的模數等於因數的模數的積，面積的幅角等於因數的幅角的和。由此可知先作出相對應 z_1，z_2 的向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 及 $\overrightarrow{OP_2}$，然後把 $\overrightarrow{OP_1}$ 旋轉一個 θ_2 角，再把它的模數擴大 r_2 倍，所得的向量就是積 $z_1\cdot z_2$，一般的形式：當

$$z_k=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$$
$$k=1,2\cdots,n,$$

時；

$$\begin{aligned}&z_1\cdot z_2\cdots\cdot z_n\\&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_n)\\&\quad+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\end{aligned}$$

特別在上式中當

$$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$$

及 $\quad r_1=r_2=\cdots=r_n$

時得

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

的 n 次乘方公式如下：

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

這就是有名的De Moivre 定理。

2.3 複數除法的幾何解釋

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

則 $\dfrac{z_1}{z_2}$

$$=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\cdot\frac{(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos_2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

據此把和複數 z_1 相對應的向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 旋轉 $-\theta_2$ 角，然後把它的模數縮小 r_2 倍，所得的向量就是表示 z_1 除以 z_2 的商。

2.4 複數開方的幾何解釋

複數 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 個 n 次方根為

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1$$

也即

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1。$$

複數 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的開 n 次方的幾何解釋是以原點為中心，$\sqrt[n]{r}$ 為半徑作圓，此圓與橫軸正向相交於點 A，在圓上取點 P_1 使

$$\overset{\frown}{AP_1}=\frac{\theta}{n}$$

再依次取點 P_2, P_3, $\cdots P_n$，使

$$\overset{\frown}{P_1P_2}=\overset{\frown}{P_2P_3}=\cdots=\overset{\frown}{P_{n-1}P_n}=\frac{2\pi}{n}$$

則點 P_1, P_2, $\cdots P_n$ 依次表示

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

的 n 個 n 次方根，而 $P_1P_2\cdots P_n$ 為圓（以 0 為圓心，$\sqrt[n]{r}$ 半徑）的內接正 n 邊形。

2.5 共軛複數的運算性質

(i) 設 $z=x+yi$，x, y 為實數，則

$$z+\bar{z}=2x,\quad z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2$$

(ii) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

有了以上的基本運算性質及幾何解釋，我們將就複數在三角、幾何、軌跡等的應用分別作介紹。

3. 複數的一些幾何應用

3.1 用複數求兩直線的夾角

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

z_1，z_2 可視為兩向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 及 $\overrightarrow{OP_2}$ 則 $\overrightarrow{OP_1}$，與 $\overrightarrow{OP_2}$ 之夾角為 $\theta_1-\theta_2=\theta$。

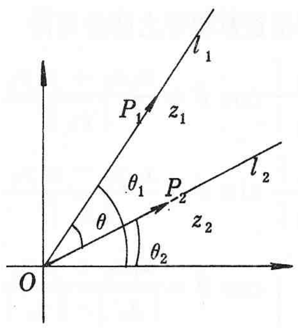


圖 3.1

∴若兩直線 l_1，l_2 交於原點，則在該兩直線分別任取兩點 P_1，P_2 其相應的複數分別為 $z_1=|z_1|e^{i\theta_1}$ 及 $z_2=|z_2|e^{i\theta_2}$，則

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i\theta}$$

$\theta=\theta_1-\theta_2$ 為 l_1, l_2 之夾角。 (3.1)

若 $z_1=(x_1, y_1)$, $z_2=(x_2, y_2)$

則

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1 i}{x_2+y_2 i}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{|\,z^2\,|^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{|\,z_2\,|^2}\ i \qquad (3.2)$$

$\therefore$若 $\overrightarrow{OP}_1$ 與 $\overrightarrow{OP}_2$ 垂直，則

$$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$$

即 $\frac{z_1}{z_2}$ 無實數部份，即

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=0$$

或 $\qquad z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0$

若 $\overrightarrow{OP}_1$ 與 $\overrightarrow{OP}_2$ 平行，則 $\theta=0$ ，或$\pm\pi$ 即

$\frac{z_1}{z_2}$ 無虛數部份，即

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)-\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=0$$

或 $\qquad z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2=0$

一般的情形， $\overrightarrow{OP}_1$ 與 $\overrightarrow{OP}_2$ 之夾角可由(3.1)兩式及根據兩複數相等之條件可得

$$\begin{cases}\dfrac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|}\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{|\,z_2\,|^2}\\[2ex]\dfrac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|}\sin\theta=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{|\,z_2\,|^2}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{|\,z_1\,|\cdot|\,z_2\,|}\\[2ex]\sin\theta=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{|\,z_1\,|\cdot|\,z_2\,|}\end{cases}$$

如果 l_1 與 l_2 不在原點相交，則在 l_1 與 l_2 上分別取兩點 P_1、P_2 ，及 P_3、P_4 ，其等相應的複數爲 z_1、z_2 及 z_3、z_4 ，則 z_2-z_1 及 z_4-z_1 分別爲 l_1 及 l_2 的向量。則由上面的討論可得其交角 θ 滿足

$$\cos\theta=\frac{(x_2-x_1)(x_4-x_2)+(y_2-y_1)(y_4-y_3)}{|\,z_2-z_1\,|\cdot|\,z_4-z_3\,|}$$

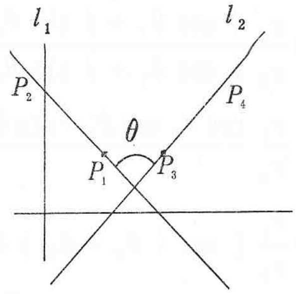


圖3.2

$$\sin\theta=\frac{(x_4-x_3)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_4-y_3)}{|\,z_2-z_1\,|\cdot|\,z_4-z_3\,|}$$

其中 $\qquad z_i=x_j+iy_j$

$\qquad j=1\ ,2\ ,3\ ,4$

所以我們有

定理3.1 通過點 $z_1=(x_1,\ y_1)$，及 $z_2=(x_2,\ y_2)$ 之直線 l_1 與通過點 $z_3=(x_3,\ y_3)$ 及 $z_4=(x_4,\ y_4)$ 之直線 l_2 垂直之充要條件爲 $\cos\theta=0$ 即

$$(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(y_3-y_1)(y_4-y_3)=0$$

此相當于 $\qquad Re\,\dfrac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=0$

這也就是說兩直線互相垂直的充要條件是此兩條直線上的向量所表示的兩個複數的商爲一個純虛數。

同理兩直線互相平行的充要條件是此兩直線上的向量所表示的兩個複數的商爲一實數，其具體陳述如下：

定理3.2 通過點 $z_1=(x_1,\ y_1)$ 及 $z_2=(x_2,\ y_2)$ 之直線 l_1 與通過點 $z_3=(x_3,\ y_3)$ 及點 $z_4=(x_4,\ y_4)$ 之直線 l_2 平行之充要條件爲 $\sin\theta=0$ ，即

$$(x_4-x_3)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_4-y_3)=0$$

此相當于 $I_m \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = 0$

3.2 用複數表示與兩向量成等夾角的向量

設 z_1, z_2, z_3, z_4 爲 4 個複數，參看圖 3.3；$z_j = |z_j| e^{i\theta_j}$，$j = 1, 2, 3, 4$，若 $\dfrac{z_1}{z_2} = \lambda \dfrac{z_3}{z_4}$；$\lambda$ 爲一實數，則夾角 $\theta_1 - \theta_2 = \theta_3 - \theta_4$ 及 $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = |\lambda| \dfrac{|z_3|}{|z_4|}$

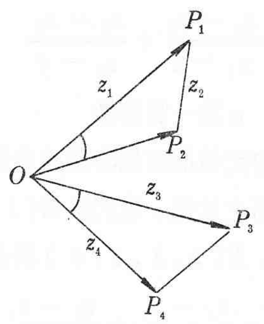


圖 3.3

特別當 $z_2 = z_3$ 此時對 z_1, z_2, z_4 而言，z_2 與 z_1 的夾角相等於 z_2 與 z_4 之夾角之充要條件如下：

$$z_1 z_4 = \lambda z_2^2, \quad \lambda \text{ 爲一實數}$$

仿此我們可得下面一普遍的結果：

定理3.3 設 $z = f(u)$，u 爲實參數，$f(u)$ 爲一複函數，則 $z = \sqrt{f(u)}$ 平分 $z = f(u)$ 與實軸之夾角及 $z = \sqrt{i f(u)}$ 平分 $z = f(u)$ 與虛軸之夾角。

練習： 試用複數來證明任一三角形中，大邊對大角，小邊對小角。

3.3 用複數求兩點的距離

設平面上的兩點 P_1, P_2 分別表示複數 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ 參看圖 3，則 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 爲相應複數 $z_2 - z_1$ 的向量。

如果 $d(P_1, P_2)$ 表 P_1, P_2 兩點的距離，那麼 $d(P_1, P_2)$ 就是和向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 相對應的複數的模數。即

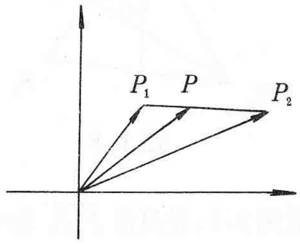


圖 3.4

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= d(z_1, z_2) \\ &= |z_2 - z_1| \\ &= |(x_2 + y_2 i) \\ &\quad -(x_1 + iy_2)| \\ &= |(x_2 - x_2) \\ &\quad + i(y_2 - y_1)| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

3.4 用複數按照已知比分割已知線段

參考圖 3.4，設點 P 將線段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分割爲線段 $\overrightarrow{P_1P}$ 及 $\overrightarrow{PP_2}$，它們的比（由於方向相同，故爲一實數）等于給定的數 λ，如何求出相應 P 點的複數？

由 $\dfrac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}} = \lambda$

可得 $\dfrac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda$

由此解得

$$z = \frac{1}{1+\lambda} z_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} z_2 \qquad (3.4)$$

或

$$z = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} i$$

如果 λ 爲正數，則點 P 介於 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 之間，否則點 P 若于 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 之延線上。

例題3.1 設 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的三個頂點分別表示複

數 z_1，z_2 及 z_3 ，試求其重心 G 相應的複數。

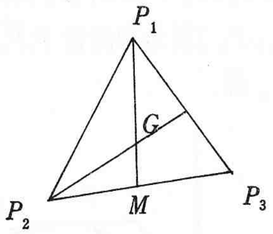


圖 3.5

解：參看圖 3.5，設 M 爲 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的中點，則由上面可知 M 所表示的複數爲 $\dfrac{z_2+z_3}{2}$。由幾何知，如點 G 把直線 $\overrightarrow{P_1M}$ 分成兩線段 $\overrightarrow{P_1G}$ 及 $\overrightarrow{GM}$ 其比例爲 2 ：1 ，則 G 就爲 $\Delta P_1P_2P_3$ 的重心，今 G 所表示的複數爲

$$z=\frac{z_1+2\cdot\dfrac{z_2+z_3}{2}}{1+2}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

3.5 交叉比及其應用

設 z_1，z_2，z_3 及 z_4 爲複平面上 4 個點，參看圖 3.5 。一個常用到的商式（交叉比）爲下面的形式：

$$E(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\div\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\qquad(3.5)$$

此比值 E 通常爲複數。

若 $\angle CAD=\angle CBD$ ，則由幾何學知 z_1，z_2，z_3，z_4，所表示的四點 A ，B ，C ，D 共圓。而

$$\angle CAD=\arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}$$

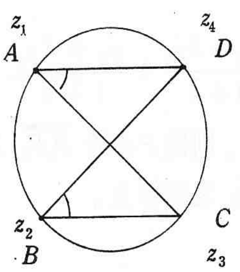


圖 3.6

$$\angle CBD=\arg\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

∴ z_1，z_2，z_3 及 z_4 四點共圓的必要條件爲其交叉比爲實數（此亦可證爲其充分條件！）

特別若固定三點 z_1，z_2 及 z_3 而令 $z=z_4$ 沿通過 z_1，z_2，z_3 三點之圓的圓周上移動，則 $E(z_1,z_2,z_3,z)$ 可取所有的實數值，因此比值 E 可視爲一參數，我們可得下面的結果：

定理 3.4 通過代表 z_1，z_2，z_3 三點之圓的方程式爲

$$u=\frac{z_1-z_3}{z_1-z}\div\frac{z_2-z_3}{z_2-z}$$

u 爲一實參數

一般式 (3.5) 的比值與四點的秩序有關，不同的排列，得不同之比值，我們以 $E(1,2,3,4)$ 表 (3.5) ，$E(2,3,1,4)$ 表 $E(z_2,z_3,z_1,z_4)=\dfrac{z_2-z_1}{z_2-z_4}+\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_4}$ 等等。

則我們可得

$$\begin{aligned}\delta&=E(1,2,3,4)\\&=E(3,4,1,2)\\&=E(2,1,4,3)\\&=E(4,3,2,1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E(2,1,3,4)\\&=E(1,2,4,3)\\&=\frac{1}{\delta};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E(1,3,2,4)\\&=E(4,2,3,1)\\&=1-E(1,2,3,4)\\&=1-\delta\end{aligned}$$

特別由此可得

$$\begin{aligned}&E(2,1,3,4)\\&=\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}+\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\\&=\frac{BC\cdot AD}{AC\cdot BD}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\delta}$$

$$E(2,3,1,4)$$

$$=\frac{z_2-z_1}{z_2-z_4}+\frac{z_3-z_1}{z_3-z_4}$$

$$=\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$$

$$=1-\frac{1}{\delta}$$

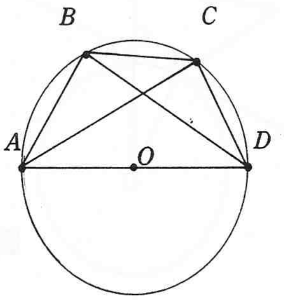
$$E(2,1,3,4)$$
$$+E(2,3,1,4)$$
$$=1$$

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$$

此結果的幾何意義就是下面有名的托勒密（Ptolemaios）定理（150. *A.D* 之成果）

定理3.5 內接四邊形的對角線相乘積等於兩相對邊相乘積之和。

依據此定理，托勒密總結了前人在天文和三角方面的研究結果，造出了第一個三角函數表，方法大略如下：取一以 AD 爲直徑的定圓，$ABCD$ 爲一內接四邊形，設 AD, AB, AC 爲已知，則 CD, BD 就由畢氏或勾股定理立即可得到。所以由托勒密定理，弦 BC 就可求出來了。現對應的弧 $\widehat{BC}=\widehat{AC}-\widehat{AB}$，這說明若兩弧的弦已知時，可求出兩弧之差的弦，在三角學上表示若已知 $\sin\alpha$，$\sin\beta$，就可算出 $\sin(\alpha-\beta)$。托氏指出由於已知 72° 弧的



弦長和 60° 弧之弦。所以他可得 12° 的弧的弦。同時，他又指示如何由圓任意一給定的弦，求出相應半弧的弦，也即從 $\sin\alpha$ 可得 $\sin\frac{\alpha}{2}$。他又指出若已知 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{BC}$ 的弦，則可求出 $\widehat{AC}$ 的弦。這是因 $\sin(\alpha+\beta)$ 可由 $\sin\alpha$，及 $\sin\beta$ 表之。由上面的理論，他從 12° 的弦，經過幾次平分，可得到 $(\frac{3}{4})°$ 的弦，並進而得出 $(\frac{1}{2})°$ 相應的弦，最後利用不等式來推演，終于得出由 0° 到 180° 間隔爲 $(\frac{1}{2})°$ 弧所對的正弦值表。

例3.2 設線段 AB 的中點是 C，以 AC 與 BC 爲對角線作平行四邊形 $AECD$ 及 $BFCG$，又作平行四邊形 $CFHD$ 及 $CGKE$，則 H, C, K, 三點共線（圖 3.7）。

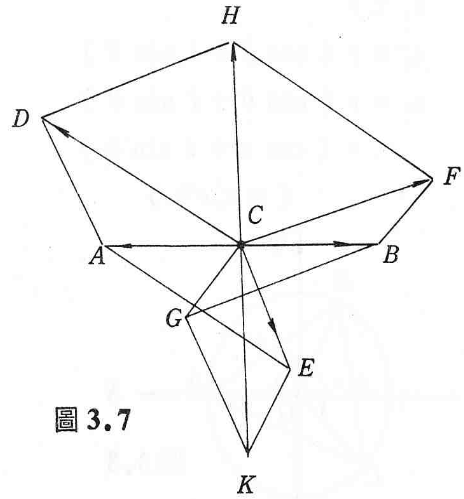


圖 3.7

証：設向量 $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CD}$ 分別和複數 z_1, z_2 及 z_3 相對應，於是向量 $\overrightarrow{CA}$ 和複數 $-z_1$ 相對應，向量 $\overrightarrow{CG}$ 及 $\overrightarrow{CE}$ 分別與複數 z_1-z_2 及 $-z_1-z_3$ 相對應。但是

$$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{CD}$$

其與 z_2+z_2 相對應。同理

$$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CE}$$

故其與複數

$$(z_1-z_2)+(-z_1-z_3)$$
$$=-(z_2+z_3)$$

相對應。現

$$\frac{(z_1 - z_2) + (-z_1 - z_3)}{z_2 + z_3}$$

$$= \frac{-(z_2 + z_3)}{z_2 + z_3}$$

$$= -1$$

此結果加上向量 $\overrightarrow{CK}$ 及 $\overrightarrow{CH}$ 有公共點 C，由兩直線平行的條件（定理 3.2）可斷定 H，C，K 三點共線。

幾何中一些極大值極小問題的解決

例3.3 試證已知圓內的內接三角形中面積極大者爲正三角形。

証：設以已知圓的圓心爲坐標原點（圖 3.8）及其半徑爲 r，ΔABC 爲其一內接三角形，並設向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 及 $\overrightarrow{OC}$ 分別和複數 z_1，z_2，及 z_3 相對應，則如圖 3.8 中

$$z_1 = r$$

$$z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z_3 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad (= z_2 e^{i\alpha})$$

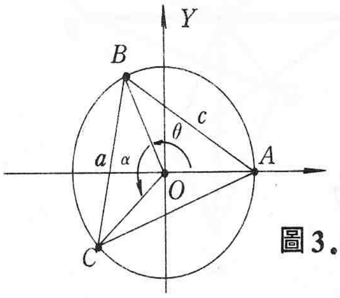


圖 3.8

那麼 ΔABC 之面積

$$= \frac{1}{2}|z_2 - z_1||z_3 - z_2|\sin B$$

$$\left(= \frac{1}{2}ac\sin B\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\theta+\alpha}{2}$$

$$\left(\because \angle B = \pi - \frac{\theta+\alpha}{2}\right)$$

$$= r^2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta+2\alpha}{2}\right)$$

如果 θ 爲定值，那麼 $\sin\frac{\theta}{2}$ 及 $\cos\frac{\theta}{2}$ 都爲定值。因此當 ΔABC 面積爲極大時，上式右邊括號裡的值應爲極大，也即 $\cos\frac{\theta+2\alpha}{2}$ 必須爲極小。$\cos\frac{\theta+2\alpha}{2}$ 的極小值爲 -1，也即

$$\frac{\theta+2\alpha}{2} = \pi \quad 或者 \quad \theta + 2\alpha = 2\pi \tag{3.8}$$

另一方面如果 α 爲定值，同上面的推理，可得

$$\alpha + 2\theta = 2\pi \tag{3.9}$$

而當任一內接三角形的面積爲極大時，方程式 (3.8) 及 (3.9) 必須同時滿足。因此可得

$$\theta = \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

也即只有當 ΔABC 爲正三角形時，其面積爲極大。

例3.4 試證從定點 A，B 到定圓上一點 P 作兩線段 PA，PB，如果使得 PA，PB 上正方形面積和爲極小，那麼點 P 必須取在 AB 的中點 M 和圓心 O 的連結線與圓周的交點。

証：設定圓的圓心和兩定點 A，B 所表示的複數分別爲 z_0，z_1 及 z_2，而點 P 所表示的複

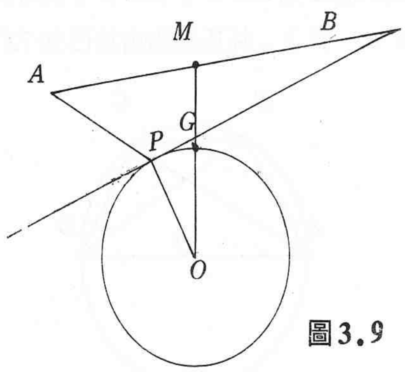


圖 3.9

數爲 z（參看圖 3.9）。

設 PA、PB 上兩正方形面積之和爲 s，則

$$s = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2$$
$$= \frac{1}{2}\{|(z-z_1)+(z-z_2)|^2 + (z-z_1)-(z-z_2)|^2\}$$
$$= \frac{1}{2}\{|2z-z_1-z_2|^2 + |z_2-z_1|^2\}$$
$$= 2\{|z-\frac{z_1+z_2}{2}|^2 + |\frac{z_2-z_1}{2}|^2\}$$

如果 s 爲極小，那麼上式右邊的第一項應爲極小。(∵第二項爲定值)而

$$|z-\frac{z_1+z_2}{2}|$$
$$= |(\frac{z_1+z_2}{2}-z_0)-(z-z_0)|$$
$$\geqslant |\frac{z_1+z_2}{2}-z_0|-|z-z_0|$$

而

$$|z-\frac{z_1+z_2}{2}| = |PM|$$
$$|\frac{z_1+z_2}{2}-z_0| = |OM|$$

如果 MO 和圓交於 G，則

$$|z-z_0| = |OP| = |OG|$$

所以

$$|PM| \geqslant |OM| - |OG| = |CM|$$

因此當向量 $\overrightarrow{PM}$ 和 $\overrightarrow{GM}$ 的長度相等時，向量 $\overrightarrow{PM}$ 的長度爲極小。這表面當點 P 和 G 重合時，s 爲極小。

例3.5 試證任何四邊形兩對角線上正方形的面積之和，等於兩組對邊的中點連線上正方形的面積之和的 2 倍。

証：設四邊形 $ABCD$ 的各頂點依次表示複數 z_1, z_2, z_3 及 z_4, AB, CD 的中點分別爲 M，N，而 BC，DA 之中點分別爲 E，F（參看圖 3.10）。

則兩對角線上正方形的面積爲

$$|AC|^2 = |z_3 - z_1|^2$$
$$|BD|^2 = |z_4 - z_2|^2$$

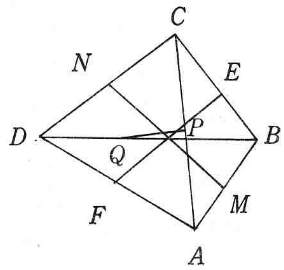


圖 3.10

而兩組對邊中點連線的正方形的面積爲：

$$|MN|^2 = |\frac{z_3+z_4}{2} - \frac{z_1+z_2}{2}|^2$$
$$|EF|^2 = |\frac{z_4+z_1}{2} - \frac{z_2+z_3}{2}|^2$$

所以原題就等於要求證明下列等式：

$$|z_3-z_1|^2 + |z_4-z_1|^2 = 2(|\frac{z_3+z_4}{2}-\frac{z_1+z_2}{2}|^2 + |\frac{z_4+z_1}{2}-\frac{z_2+z_3}{2}|^2) \qquad (3.10)$$

而事實上

$$z_3 - z_1 = (\frac{z_3+z_4}{2}-\frac{z_1+z_2}{2}) - (\frac{z_4+z_1}{2}-\frac{z_2+z_3}{2}) \qquad (3.11)$$

$$z_4 - z_2 = (\frac{z_3+z_4}{2}-\frac{z_1+z_2}{2}) + (\frac{z_4+z_1}{2}-\frac{z_2+z_3}{2}) \qquad (3.12)$$

今根據複數的性質：對任何複數 w_1，w_2，

$$2|w_1|^2 + 2|w_2|^2 \equiv |w_1+w_2|^2 + |w_1-w_2|^2 \qquad (3.13)$$

此式可直接以

$$w_1 = x_1 + iy_1$$

及 $$w_2 = x_2 + iy_2$$

x_i, y_i 爲實數，代入檢驗，或利用幾何的事實：一平行四邊形兩對角線平方和等於四邊平方之和！所以式 (3.10) 由式 (3.11)，(3.12) 及 (3.13) 立即可得。