對局論簡介(下)
——2人0和對局開始

賴漢卿

4. 鞍點、平衡點與min-max定理

上一節的例子，可用一般極大、極小的問題來說明。

設X，Y分別是Ⅰ，Ⅱ兩個與局者的策略空間。對第Ⅰ與局者的意願來說，不管第Ⅱ與局者取什麼策略$y \in Y$，總想求得一策略x^* $\in X$，使$f(x^*, y)$為

$$f(\cdot, y): X \to \boldsymbol{R}$$

之最大值。換句話說

$$\text{(P)} \qquad \underset{x \in X}{\text{maximize}}\ f(x, y) = f(x^*, y)$$

同樣地，對第Ⅱ與局者來說，對於每一個$x \in X$，想求得一策略$y^* \in Y$，使得$f(x, y^*)$為函數

$$f(x, \cdot): Y \to \boldsymbol{R}$$

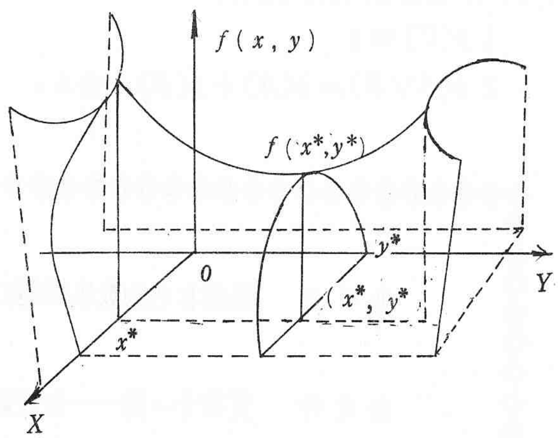
之最小值。換句話說

$$\text{(D)} \qquad \underset{y \in Y}{\text{minimize}}\ f(x, y) = f(x, y^*)$$

於是對所有$x \in X$及$y \in Y$，如果存在一點(x^*, y^*)滿足下列不等式

$$f(x, y^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x^*, y) \quad \text{——(6)}$$

則稱點(x^*, y^*)為函數$f(x, y)$的**鞍點**(saddle point)，此時之函數值$f(x^*, y^*)$稱為**鞍點值**



定理1 設 $v_1 = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} f(x, y)$

$$v_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

則下面兩個命題是等價的。

①函數$f(\cdot, \cdot): X \times Y \to \boldsymbol{R}$ 有鞍點

② $v_1 = v_2$

証明 ①⇒②，設$(x^*, y^*) \in X \times Y$為函數$f$的一鞍點，則

$$v_1 = \max_{x \in A} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

$$\geqslant \min_{y \in Y} f(x^*, y)$$

$$= f(x^*, y^*)$$

$$= \max_{x \in X} f(x, y^*)$$

$$\geqslant \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

$$= v_2$$

但 $v_2 \geqslant v_1$ 恒成立，結果得 $v_1 = v_2$ 。

②⇒①，設 $v_1 = v_2 = v$ ，視

$$\min_{y \in Y} f(x, y)$$

為 x 的函數，其最大值取在 x^* ，同樣地視

$$\max_{x \in X} f(x, y)$$

為 y 的函數，其最小值取在 y^* ，則

$$\max_{x \in X} f(x, y^*)$$

$$= \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

$$= \max_{x} \min_{y} f(x, y)$$

$$= \min_{y \in Y} f(x^*, y)$$

故對所有 $x \in X$ ， $y \in Y$ ，

$$f(x, y^*) \leqslant v \leqslant f(x^*, y)$$

也就是 $v = f(x^*, y^*)$ 。故 (x^*, y^*) 為一鞍點。

在定理 1 中之鞍點值為

$$v = f(x^*, y^*)$$

$$= \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

$$= \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

稱之為**對局值**（ game value ），而鞍點 $(x^* . v^*)$ 稱之為此對局的**平衡點**（ equilibrium point ）。

注意：在對局中的最佳策略 (x^*, y^*) 不一定是唯一確定之值。

能求得一對最佳策略 (x^*, y^*) ，則稱此矩陣對局的一解。一般所說要解一個對局，就是去求各與局者的最佳策略，以及對局值，在有限對局時在各與局者的最佳策略（平衡點）之對局函數值就是對局值。故下一節我們就來探討（矩陣）對局的解法。

5. 鞍點元素之求法

解一矩陣對局 A ，即求對局值 v 及與局者的最佳策略 x^* ， y^* 。對一般混合對局，其對局函數（期望值）為

$$f(x, y) = xAy$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

（ $a_{ij} = f(i, j)$ 表示Ⅰ取第 i 策略，Ⅱ取第 j 策略時之利得函數。）其中

$$x = \langle x_1, \cdots, x_m \rangle$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 , \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

而 $$y = \langle y_1, \cdots, y_n \rangle^t$$

$$0 \leqslant y_j \leqslant 1 , \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

特別含純策略時，則記為 $f(i, y)$ ， $f(x, j)$ ， $f(i, j)$ 。這些對局函數分別是

$$f(i, y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

$$f(x, j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$$

$$f(i, j) = a_{ij}$$

特別是 $f(i, j) = a_{ij}$ ，表示第Ⅰ與局者取第 i 策略，而第Ⅱ與局者取第 j 策略的對局，此時 $x = [0, \cdots 0, \underset{\text{第 } i \text{ 元素}}{1}, 0 \cdots, 0]$

$$y = [0, \cdots 0, \underset{\text{第 } j \text{ 元素}}{1}, 0, \cdots 0]^t$$

若 v 為對局值，則各與局者的最佳策略為 x^*， y^* 的充要條件是：

對任意的 $1 \leqslant i \leqslant m$ ， $1 \leqslant j \leqslant n$ ，

$$f(i, y^*) \leqslant v \leqslant f(x^*, j) \tag{7}$$

在純策略對局中，我們定義：

矩陣 A 的元素 a^*_{kl} 稱為 A 的**鞍點元素**（ Saddle element ）即滿足條件

① 對任意 j ， $a_{kl}^* \leqslant a_{kj}$

② 對任意 i ， $a_{kl}^* \geqslant a_{il}$

亦即 $f(i, l) \leqslant f(k, l)$

$$\leqslant f(k, j) \qquad (8)$$

在具有鞍點元素的 2 人 0 和對局，稱爲**完全決定對局**(completely deterministic game) 如(8)，k ，l ，分別是 I ，II 要求的最佳策略。下面的例子，我們可容易地觀察矩陣之鞍點元素 (打圈者是也) 。

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & -10 & -3 \\ 50 & 85 & 70 \\ -10 & 50 & -25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & -9 \\ 5 & -8 & -2 & 10 \\ 6 & 10 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

上面第三個矩陣有兩個鞍點元素，但其對局值仍是唯一。

例4 設台視 (I) 與中視 (II) 兩電視台，在某段時間中，爭取其收視率。如果台視備有 3 種節目，中視備有 4 種節目可選播，但他們彼此不明對方要選播那一個節目。今有一評審機關 (polling agency) 統計兩台收視率節目之情況如下

中視 (II)

台視 (I)	1	2	3	4
1	60	20	30	55
2	50	75	45	60
3	70	45	35	30

表中數字是台視收視的百分比 (此處設只有兩電視台) ，中視的收視率爲 100 減去表中之數。則兩台應選取那一個節目來播放較好呢？

解：若從表中數字減去 50, 以兩台平分爲基準做成下面一新表格

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -30 & -20 & 5 \\ 0 & 25 & -5 & 10 \\ 20 & -5 & -15 & -20 \end{bmatrix}$$

新表中之數字依然表示台視的收視率。顯然這是兩人零和的對局，在 A 中

$$a_{23} = -5$$

就是鞍點元素。因此 (I) 該選播第 2 種節目，而 II 該取第 3 種節目，是各台的最佳策略。此時對局值爲

(I) = 45 % II = 55 % (收視率)

在上面之調查與安排下，中視比台視稍佔優勢。

關於完全混合對局的解法可利用(7)式來求出 x^* 及 y^* ，當然此時 $v = f(x^*, y^*)$ 。

例5 設給定的矩陣爲

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

其中設 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

試解此矩陣對局，即求出最佳策略

$$x^* = < x_1, x_2, x_3 > \in P_3$$

$$y^* = < y_1, y_2, y_3 > \in Q_3$$

及對局值 v 。

解：由(7)的第 2 個不等式及第 1 個不等式得

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 \geqslant v \\ \lambda x_1 + x_2 + \lambda x_3 \geqslant v \\ \lambda x_2 + x_3 \geqslant v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y_1 + \lambda y_2 \leqslant v \\ \lambda y_1 + y_2 + \lambda y_3 \leqslant v \\ \lambda y_2 + y_3 \leqslant v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

上面左邊各式都用等號取代時，求 x_1 ， x_2 ， x_3 及 v 四個未知數的聯立一次方程式可得其根爲

$$x_1 = x_3 = \frac{1-\lambda}{3-4\lambda},$$

$$x_2 = \frac{1-2\lambda}{3-4\lambda}, \quad v = \frac{1-2\lambda}{3-4\lambda}$$

但 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ， $x_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$), 故

$$x^* = \left\langle \frac{1-\lambda}{3-4\lambda}, \frac{1-2\lambda}{3-4\lambda}, \frac{1-\lambda}{3-4\lambda} \right\rangle$$

是一混合策略，又由A之對稱性得第Ⅱ與局者的最佳混合策略爲

$$y^* = \left\langle \frac{1-\lambda}{3-4\lambda}, \frac{1-2\lambda}{3-4\lambda}, \frac{1-\lambda}{3-4\lambda} \right\rangle$$

但是 $$v = \frac{1-2\lambda}{3-4\lambda},$$

故 $$f(i, y^*) = v \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = f(x^*, j),$$

即 $$(Ay^*)^t = v \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x^* A$$

由(7)得知x^*，y^*爲一對最佳策略，而v爲對局值。

6. 無限對局的情形

設$\{X, Y, f(x, y)\}$爲2人0和之無限對局。X，Y表位相空間，其Borel集合族設爲$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$。若測度空間$(X, \boldsymbol{u})$及$(Y, \boldsymbol{v})$上的機率測度的全體爲P，Q，則Ⅰ，Ⅱ兩個與局者的混合策略各爲$\mu \in P$，$\nu \in Q$，具體之意思是與局者Ⅰ的純策略爲x，而與局者Ⅱ的純策略爲y，則對任意可測集合$E \in \boldsymbol{u}$，$F \in \boldsymbol{v}$，考慮

x落在E內的機率爲

$$\text{Prob}\ \{x \in E\} = \mu(E)$$

y落在F內的機率爲

$$\text{Prob}\ \{y \in F\} = \nu(F)$$

此時$f(x, y)$表示在$X \times Y$上取$x \in X$，$y \in Y$時的利得函數，而對局函數（Ⅰ的期望值）爲

$$E(\mu, \nu) = f(\mu, \nu) = \int_X \int_Y f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \qquad (8)$$

我們定義

$$\{P, Q, f(\mu, \nu)\} \qquad (9)$$

爲2人0和對局$\{X, Y, f(x, y)\}$的**混合擴張**（mixed extension），而利得函數$f(x, y)$，稱爲對局函數$f(\mu, \nu)$的密度函數density）。對(9)式若使下列等式

$$\sup_{\mu \in P} \inf_{\nu \in Q} f(\mu, \nu) = \inf_{\nu \in Q} \sup_{\mu \in P} f(\mu, \nu) \qquad (10)$$

成立，則（無限）對局就完全決定（strictly determined），其共同値，稱爲**對局值**（game value）。

得注意的是，對局值可以決定時，與局者的最佳策略却未必存在。也就是在有限對局所成立的min-max 定理未必能成立。如果Ⅰ有μ^*使

$$\sup_{\mu \in P} \inf_{\nu \in Q} f(\mu, \nu) = \inf_{\nu} f(\mu^*, \nu) \qquad (11)$$

成立，則μ^*稱爲 **min-max 策略**。又若Ⅱ有ν^*使得

$$\inf_{\nu \in Q} \sup_{\mu \in P} f(\mu, \nu) = \sup_{\mu} f(\mu, \nu^*)$$

成立，則ν^*稱爲 **max-min 策略**。

在無限對局中的2人0和問題，min-max 定理一般未必能成立，而與min-max 定理相當的，都寫做(10)式之形式。要使 min-max 定理成立，則必須附有更強的條件，如$f(x, y)$的連續性以及X或Y至少要有一個是緊緻（若在$\boldsymbol{R}^n$上，則有界閉集合是緊緻）。這種較高一層的位相概念，必從中而生。於此我們不預備延伸進去。我們說若(11)與(12)的μ^*及ν^*都存在，使得(11)與(12)之值等於對局值v，則μ^*，ν^*分別稱爲與局者Ⅰ、Ⅱ的最佳策略。

若對局值v存在，而使各與局者都有他們自己的最佳策略x^*，y^*的充要條件是：對所有$x \in X$，$y \in Y$，

$$f(x, y^*) \leqslant v \leqslant f(x^*, y)$$

（此處X，Y表Ⅰ與Ⅱ的策略空間）

最後我們舉一個無限2人0和對局之例子，做爲這一次對局論簡介的一個段落。

例6 設與局者Ⅰ，Ⅱ在閉區間〔0，1〕互爲獨立地選取一實數x與y，並設Ⅰ的利得函數爲

$$f(x,y)=(x-y)^2$$
$$0\leqslant x,\quad y\leqslant 1$$

則他們的混合策略分別是〔0，1〕上的分布函數$\mu(x)$，$\nu(y)$。於是第Ⅰ與局者的期望值可求得爲

$$\begin{aligned} f(\mu,\nu) &= \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) \\ &= \int_0^1\int_0^1 (x-y)^2\,d\mu(x)\,d\nu(y) \end{aligned}$$

這裡要算出Ⅰ與Ⅱ的最佳策略μ^*與ν^*，我們需Stieltjes 積分的概念。設$I_a(x)$表示截斷函數（truncation function），即

$$I_a(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$$
$$但\quad 0<a\leqslant 1$$

則Ⅰ的利得函數能最大的是當Ⅱ取$y=0$或$y=1$時$x=1$或$x=0$，故Ⅰ的最佳策略應該是

$$\mu^*(x)=\frac{1}{2}I_0(x)+\frac{1}{2}I_1(x)$$

其中$\frac{1}{2}$表示x取到0或1的機率。又對Ⅱ而言使$f(x,y)=(x-y)^2$最小的可能情形爲Ⅱ取的y不能超過$\frac{1}{2}$，故Ⅱ的最佳策略爲

$$\nu^*(y)=I_{\frac{1}{2}}(y),$$

此時

$$\begin{aligned} &\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x,\nu^*) \\ &= \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min_{0\leqslant y\leqslant 1} f(\mu^*,y) \\ &= \min_{0\leqslant y\leqslant \frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}(0-y)^2+\frac{1}{2}(1-y)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned} v &= \max_{\mu}\min_{\nu} f(\mu,\nu) \\ &= \max_{\mu} f(\mu,\nu^*) \\ &= \min_{\nu} f(\mu^*,\nu) \\ &= \frac{1}{4}\text{。} \end{aligned}$$

如果不許有混合策略，也就是在純策略對局下，則

$$\begin{aligned} &\max_x\min_y (x-y)^2 \\ &= 0<\frac{1}{4} \\ &= \min_y\max_x (x-y)^2\text{。} \end{aligned}$$

蓋因上式右端於給定x時，$(x-y)^2$是y的凸函數，因此Ⅱ有一最佳策略，即$I_{\frac{1}{2}}(y)$，但

$$\begin{aligned} &\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \min_y\max_x (x-y)^2 \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

而左端，對於給定的y，$(x-y)^2$並不是x的凹函數，故

$$\max_x\min_y (x-y)^2=0$$

這個例子比矩陣對局要難上一層。這一個介紹的目的是使讀者，對兩人零和的對局，瞭解最簡單的矩陣對局之外，希望對無限對局也有一種形象概念。

—本文作者任教於清華大學數學系—