關於聯考試題解答

朱建正

許多讀者認爲本刊的解答僅在佔用篇幅而已。爲力求改進，本刊將以非選擇題方式扼要作出解答。對學子們書寫非選擇題答案有示範作用。最重要的是，「一旦你已經有了可行的解題計劃，你就不需要草稿。」許多學生往往將草稿作在別處，抄回時脫漏極多，影響閱卷時之判斷，損害考生自身利益甚大。

社會組考題：

甲. 設有一球，其半徑爲$\sqrt{15}$。另有三平面F_1、F_2、F_3分別與此球相交於圓G_1、G_2、G_3。已知從球心到F_1、F_2、F_3的距離分別爲$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$。求G_1、G_2、G_3之面積比。

解：因圓面積比等於其半徑平方之比，故先求半徑。

又圓半徑，球心至圓心線段，球半徑三者成直角三角形，故

$$r_1=\sqrt{15-3}=\sqrt{12}$$
$$r_2=\sqrt{15-5}=\sqrt{10}$$
$$r_3=\sqrt{15-6}=\sqrt{9}$$

故得三圓面積比爲 12 : 10 : 9

乙. 設 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 求 $\tan\theta+\cot\theta$

解：
$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

將已知平方得

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{3}$$

$$\text{故原式}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-1\right)}=6$$

丙. 設$f(x)$爲三次多項式且$f(0)=1$，$f(1)=9$，$f(2)=8$，$f(3)=4$，求$f(4)$。

解：因$f(0)=1$

故設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$

$$a+b+c+1=9$$
$$a+b+c=8 \qquad (1)$$
$$8a+4b+2c+1=8$$
$$8a+4b+2c=7 \qquad (2)$$
$$27a+9b+3c+1=4$$
$$9a+3b+c=1 \qquad (3)$$

由(1), (3) $\quad 8a+2b=-7$

(2) − 2 × (1) $\quad 6a+2b=-9$

$$\therefore\ a=1 \quad b=-\frac{15}{2} \quad c=\frac{29}{2}$$

用綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -\frac{15}{2} & \frac{29}{2} & 1 & \underline{4} \\ & 4 & -14 & 2 & \\ \hline 1 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 3 & \end{array}$$

故$f(4)=3$

丁. 袋子裏有卡片 52 張，上有 1 至 52 的號碼。設摸出機會均等，求自袋中任抽兩張其和恰爲 36 的機率。

解：

$$\frac{17}{_{52}C_2}=\frac{17}{52\times 51}=\frac{1}{78}$$

戊. 求與 $x-2y+3=0$ 垂直的橢圓 $16x^2+5y^2=80$ 的切線。

解： 切線斜率 $=-2$

由 $16xx_0+5yy_0=80$

得 $\dfrac{16x_0}{5y_0}=2$ 代入橢圓方程式求 x_0，y_0

得 $16x^2+\dfrac{(8x)^2}{5}=80$

故 $x^2+\dfrac{4}{5}x^2=5$

$\dfrac{9}{5}x^2=5$

故 $x_0=\pm\dfrac{5}{3}$

$y_0=\pm\dfrac{1}{5}\cdot 8\cdot\dfrac{5}{3}$

$=\pm\dfrac{8}{3}$

$2x+y=\pm 6$ 或 $y=-2x\pm 6$

即 $16\cdot\dfrac{5}{3}x+5\cdot\dfrac{8}{3}y=\pm 80$

己. 設 α、β、γ 為 $x^3+3x^2+4x-24=0$ 之三根，求

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix}$$

解： 行列式 $=-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$

$=-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$=-(-3)[(-3)^2-3\cdot 4]$

$=-3\cdot 3$

$=-9$

1.設 x、y 為實數，且 $|x|<1$，$\left|\dfrac{x-y}{1-xy}\right|<1$

求 y 之範圍。

解： 平方，消去絕對值符號

得 $(x-y)^2<(1-xy)^2$

即 $1+x^2y^2-x^2-y^2>0$

$(1-x^2)(1-y^2)>0$

因 $x^2<1$

故 $1-y^2>0$

故得 $|y|<1$ 為其範圍

註： 高中課程中對絕對值問題的處理，率皆以分情況討論為主。其實這是不得已而為之的下策。利用平方、連續等基本性質比較有效。

2.求證下列二實數為無理數

(1) $\sqrt{25}+\sqrt{3}$

(2) $\log_{10}2+\log_{10}3+\log_{10}5$

解： $\sqrt{25}+\sqrt{3}=5+\sqrt{3}$

先證 $\sqrt{3}$ 為無理數。

設不然，則可設

$\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$ $(p, q)=1$

p、q 正整數

則 $3p^2=q^2$

故 $3|q$，設 $q=3q'$

即 $3p^2=9q'^2$

$p^2=3q'^2$

故 $3|p$，與 $(p, q)=1$ 不合 得證

現若 $5+\sqrt{3}$ 為有理數，

則 $(5+\sqrt{3})-5=\sqrt{3}$ 亦必為有理數

與已證不符。 Q. E. D.

註： $\sqrt{25}$ 怪怪，$\sqrt{3}$ 則人皆知為無理數。考成設 $\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$……則對乙組考生嫌太難。如果考證明 $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 為無理數，考生平方，得 $12+2\sqrt{7}$，再說有理數平方應為有理數，故由矛盾得證。則能與第(2)子題和甲組試題呼應，比較合理。

(2) $\log_{10}2+\log_{10}3+\log_{10}5$

$=\log_{10}10+\log_{10}3$

$=1+\log_{10}3$

設 $\log_{10}3$ 爲有理數

則設 $\log_{10}3=\dfrac{q}{p}$ $(p,q)=1$

p、q 爲正整數

即 $3=10^{\frac{q}{p}}$

故 $3^p=10^q$

但 $3\nmid 10^q$ 而 $10\nmid 3^p$ 故矛盾，

得證 $\log_{10}3$ 爲無理數。

用與(1)相同之法，可知 $1+\log_{10}3$ 爲無理數

(3)已知 $3x^2+12x^3+ax-48=0$ 有三重根，求 a 值並解此方程式。

（解 1）：設 α、α、α、β 爲其四根。

則由根與係數關係

$3\alpha+\beta=-4$

$\alpha^3\beta=-48$

$3\alpha^2+3\alpha\beta=0$

故 $3\alpha(\alpha+\beta)=0$

但 $\alpha\neq0$ 故 $\alpha+\beta=0$

故得 $\alpha=-2$ $\beta=2$

$$\begin{array}{l|l} 3+12+\ 0\ +\ \ a-\ 48 & 2 \\ \quad +\ 6+36+72\ +\ \ 144+2a & \\ \hline 3+18+36+72+a+\underline{96+2a} & \end{array}$$

$96+2a=0$

$\therefore\ a=-48$

（解 2）：令 α 表三重根，用綜合除法

$$\begin{array}{l|l} 3\ +\ 12\ +\ 0\ +\ a\ -\ 48 & \alpha \\ \qquad +3\alpha+12\alpha+3\alpha^2 & \\ \hline 3+12+3\alpha+12\alpha+3\alpha^2 & \\ \qquad +3\alpha+12\alpha+6\alpha^2 & \\ \hline 3+12+6\alpha+\underline{18\alpha+9\alpha^2} & \end{array}$$

故 $18\alpha+9\alpha^2=0$

得 $\alpha=-2$ 下略

解說：許多高中老師堅信，並在報上聲言，本題非用微分法不可。本次聯考命題教授對於高中課程和微積分的分野是很清楚的。本題不用微分做，不見得就比較慢。就閱卷情形觀之，會的學生大抵（解 1）和微分皆會。用解 2 爲之者我沒有見過。我有 1000 份以上之經驗。

(4)三角形之三邊爲 a、b、c，求證面積公式

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

證：$\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin c$

$=\dfrac{1}{2}ab\cdot 2\sin\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{c}{2}$

$=\dfrac{1}{2}ab\cdot 2\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-a)}{ab}}$

$\cdot\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

半角公式可由餘弦定律導出，因恐 $\sin\dfrac{c}{2}$ 公式來證被扣分，故再證之。

$\sin\dfrac{c}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos c}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{c^2-(a-b)^2}{4ab}}$

$=\sqrt{\dfrac{(c-a+b)(c+a-b)}{4ab}}$

現 $c-a+b=a+b+c-2a$

$=2(s-a)$

同理 $c+a-b=2(s-b)$

故 $\sin\dfrac{c}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

同理可證 $\cos\dfrac{c}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

自然組考題：

甲. 決定是否偶函數。

$$f_1(x)=\frac{\sin x}{10^x-10^{-x}}$$

x 變號時分子分母同時變號，故爲偶函數

$$f_2(x)=(5^x+5^{-x})\sec x$$

x 變號時，兩個因子都不變號，故爲偶函數。

$$f_3(x)=\frac{(x^3+x)(\cot x+\csc x)}{x-\tan x}$$

x 變號時，三個因子都變號，故爲奇函數

$$f_4(x)=x\log_{10}(x+\sqrt{x^2+1})$$

因 $x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

故 $\log_{10}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=-\log_{10}(\sqrt{x^2+1}+x)$

故 $f_4(x)$ 爲偶函數。

$$f_5(x)=\frac{x}{10^x-1}-1+\frac{x}{2}$$

$$f_5(-x)=\frac{-x}{10^{-x}-1}-1-\frac{x}{2}$$

$$=\frac{-10^x\cdot x}{1-10^{+x}}-\frac{x}{2}-1$$

$$=\frac{x(10^x-1)}{10^x-1}+\frac{x}{10^x-1}-\frac{x}{2}-1$$

$$=\frac{x}{10^x-1}+\frac{x}{2}-1$$

故爲偶函數。

註：這裏所見的函數如 10^x-10^{-x}，$\log(x+\sqrt{x^2+1})$ 和 $f_5(x)$ 是微積分中常見的雙曲線函數和Bernoulli 係數的生成函數。第五子題最難。

乙. 兩端點在一橢圓上的線段稱爲該橢圓的弦。在橢圓 $25x^2+4y^2=100$ 內，求以（1，－4）爲中點的弦方程式。

解：設此方程式爲

$$y=m(x-1)-4$$

代入 $25x^2+4[m(x-1)-4]^2=100$

$(25+4m^2)x^2-8m(m+4)x+\cdots\cdots=0$

故 $\dfrac{8m(m+4)}{25+4m^2}=2$

$4m(m+4)=25+4m^2$

$m=\dfrac{25}{16}$

故爲 $16y=25(x-1)-64$

即 $25x-16y-89=0$

註：遵中點公式行之，一點都不困難。有老師認爲，此題需特殊公式，故補習班學生較佔優勢，如此見識令人嗟歎。

丙. x^3+ax^2+2x+4 與 $2x^3+x^2+a^2x+2$ 有二次公因式，求 a。

解：後式減前式×2

$(1-2a)x^2+(a^2-4)x$

前式減後式×2

$x[-3x^2+(a-2)x+(2-2a^2)]$

故得 $\dfrac{1-2a}{-3}=\dfrac{a^2-4}{a-2}=\dfrac{-6}{2(1-a^2)}$

若 $a=2$

則 $\dfrac{1-2a}{-3}=\dfrac{-6}{2(1-a^2)}$

故 $a=2$ 爲解

再解 $1-2a=-3(a+2)$ 得 $a=-5$

代入 $\dfrac{1-2a}{-3}\neq\dfrac{-6}{2(1-a^2)}$ 不是解

答：$a=2$

註：直接以 $(1-2a)x^2+(a^2-4)x-6$ 去除任一式亦可，不過較繁。

丁. 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k^2+2k}$

(1)求 $S=\lim S_n$

(2)求最小的 m 使 $|S-S_m|<\dfrac{1}{1000}$

解：
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=3}^{n+2}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}+(-1)^n\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

故　$S=\dfrac{1}{4}$

要　$\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}<\dfrac{1}{1000}$

得　$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}<\dfrac{1}{500}$

因　$\sqrt{500}=10\sqrt{5}$

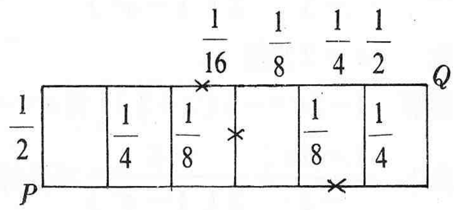
而　$22<10\sqrt{5}<23$

故取　$n=21$

試之因　$22\times 23=506$

因此　$n=21$

戊. 有街道圖如下，甲自 P 往 Q，乙自 Q 往 P，兩人同時出發以最短路線前進。假設在每一分叉路口選擇機率相等。求甲乙相遇的機率？如圖，甲乙相遇之處有三點，以 x 爲記。



解：甲乙兩人可能相遇地點爲如上三處。故得
$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{16}$$
$$=\frac{4+2+1}{8^2}+\frac{1}{16^2}=\frac{29}{16^2}$$

己. 設 ΔPQR 爲平面 $7x-6y+4z+2=0$ 上的三角形。另有四個平面其方程式分別爲 $3x-4y+5z=0$，$4x-3y+5z=0$，$4x-5y+3z=0$ 及 $5x-3y+4z=0$ 求 ΔPQR 在此四平面的正射影的面積的最小值與最大值之比。因正投影的面積爲原來面積乘以兩面角的餘弦。

解：故兩平面愈接近平行，其正射影面積值愈大。故作單位法向量之內積，因此四平面之係數恰同爲 3、4、5 之數，故比較大小，可直接使用係數向量。

$\langle 7,-6,4\rangle\cdot\langle 3,-4,5\rangle$

$=21+24+20=65$

$\langle 7,-6,4\rangle\cdot\langle 4,-3,5\rangle$

$=28+18+20=66$

$\langle 7,-6,4\rangle\cdot\langle 4,-5,3\rangle$

$=28+30+12=70$

$\langle 7,-6,4\rangle\cdot\langle 5,-3,4\rangle$

$=35+18+16=69$

且　$\dfrac{m}{M}=\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}=\dfrac{N\cdot N_1}{N\cdot N_2}=\dfrac{65}{70}=\dfrac{13}{14}$

1.從 0 到 9 取兩相異之數做能被 45 整除的三位數，共有幾個？

解：個位數，不是 0，必爲 5。

若爲 0，則十位和百位的和必爲 9（不可能爲 18），故共得 8 組。

若爲 5，則十位和百位的和必爲 4 或 13，爲 4 時，得 3 組；爲13時，得百位數可能爲 4、6、7、9，共 4 組。

$8+3+4=15$

答：15 個

註：因 $1000\div 45=22\cdots\cdots r$，故以列舉法爲之，切實有效。欲有效保護題旨，宜改用較大之數。

2.解：
$$0<\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}<1$$

左邊部份即

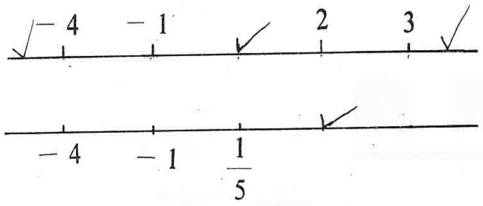
$(x-2)(x-3)(x+4)(x+1)>0$

右邊部分即

$$\frac{x^2-5x+6-x^2-5x-4}{x^2+5x+4}<0$$

即 $$\frac{10x-2}{x^2+5x+4}>0$$

圖解之



故得 $x>3$ 和 $\frac{1}{5}<x<2$ 爲解答。

3.證明三角恆等式

$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$

並由此證明 $\sin 6°$ 爲無理數。

解：由De Moivre定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

故 $\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\,\sin\theta - 10\cos^2\theta\,\sin^3\theta + \sin^5\theta$

$= 5(1-\sin^2\theta)^2\sin\theta - 10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta + \sin^5\theta$

$= (5+10+1)\sin^5\theta + (-10-10)\sin^3\theta + 5\sin\theta$

$= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$

故 $\sin 6°$ 爲 $16x^5 - 20x^3 + 5x = \frac{1}{2}$

的正實根，即

$$32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0$$

但上式的正有理根僅有 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{16}$、$\frac{1}{32}$ 幾種可能。即 $32 - 40y^2 + 10y^4 - y^5 = 0$ 之有理根必爲 2^n，$n = 0$、1、2、3、4、5 之形式。雖然 $y = 2$ 爲一根但 $\sin 6° < \sin 30° = \frac{1}{2}$ 不可能。由 $32 = 40y^2 - 10y^4 + y^5$ 知，y^2 至多僅能爲 4 之倍數，故 $\sin 6°$ 不是 $\frac{1}{8}$、$\frac{1}{16}$、或 $\frac{1}{32}$，故 $\sin 6°$ 不是有理數。

註：補習班解答在剔除 $\pm\frac{1}{4}$、$\pm\frac{1}{8}$、$\pm\frac{1}{16}$、$\pm\frac{1}{32}$ 時，潦草爲之，不足爲訓。

4.設 a、b、c、d、e、f 均爲實數，求證

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

解：第二行減第三行 $\times\frac{a}{b}$，第四行減第三行 $\times\frac{c}{b}$

得 $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ -a & -\frac{ad}{b} & d & e-\frac{cd}{b} \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e+\frac{af}{b} & -f & \frac{cf}{b} \end{vmatrix}$$

展開 $$b\begin{vmatrix} -a & -\frac{ad}{b} & e-\frac{cd}{b} \\ -b & -d & f \\ -c & -e+\frac{af}{b} & \frac{cf}{b} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} +ab & +ad & be-cd \\ +b & +d & f \\ +c & +e-\frac{af}{b} & \frac{cf}{b} \end{vmatrix}$$

$= adcf + adcf + (be-cd)(be-af) - cd(be-cd) - af(be-af) - adcf$

$= b^2e^2 + a^2f^2 + c^2d^2 + 2adcf - 2cdbe - 2afbe$

$= (ad - be + cf)^2$　（共 9 項無誤）

故恆 $\geqslant 0$

註：有老師說補習班學生較有利。其實這個所謂Pfaff行列式因只有四階所以展開不難。當然事先知道它是完全平方可以篤定些，但是展開化簡之後，學生應該可以認出它是完全平方。

（本文作者任教於台大數學系）