從爲『社會組』同學加油談至試題分析

羅添壽

期考過後，同事們爲了散心，皆趁著暑假輔導未開始前，紛紛組隊逍遙遊去了。唯獨筆者守候家裡(同參加聯考諸子弟們一樣緊張的心情)等待聯考這天的來臨。(緊張程度不低於應考者，因筆者常於課堂上，向同學們強調並保證今年聯考試題必比往年更合理，平時好好研習數學者至少可得 50 ～ 60 分，放棄者亡。筆者此句話是對社會組同學講的，因社會組放棄數學者很多。)

緊張的心情直至 7 月 1 日拿到試題後才平靜，不但愉快且興奮，因試題不但普遍合理，難易適中，對平時好好研習數學的同學們有所交待。

今筆者將今年「社會組」試題分析於下：

1.優　點

(1) 題目難度降低，然「簡易試題」必經思考後始能求其結果，不像往年簡易試題只要看到題目不加思　直接代公式(或代值)即可得分。

註：①往年一些放棄數學者，所存唯一希望是死背幾個常用重要公式，就準備進考場，以最少的準備時間，得到一些額外(或許更多)的分數。

②往年時常聽到同學們說：「苦讀(習)三年的數學所得到的分數，還不是與放棄者的分數一樣」，當老師的我只有以苦笑回答了。

(2) 題目平均分布，無所謂重要單元，不但能使考生眞正研習數學，不致於專攻某單元，放棄某單元(有些教師喜歡強調某單元必考，某些單元必不考)，同時間接可引導高中數學正常化。

(3) 試題分量安排很合理，十大題一般考生必可在規定時間內完成，實爲歷屆聯考所罕見。

(4) 試題本身每題之命題皆很完美，沒有疑義，亦沒超出高中生程度的試題。

註：此次試題，只要平時上課注意聽講，課餘時好好思考分析所習過之問題，再多加演練一些課題，即可考出好成績，未必參加補習或課業輔導(因補習時有些老師喜歡故作神秘，題目花樣百出，難題窮出，目的在訓練學生成爲解題高手，程度較差者因無法適應與吸收所習，造成反效果而放棄數學，程度較好者，喜愛鑽牛角尖之試題，結果並無學到什麼眞正的數學知識)。

2.缺　失

(1) 選擇題《丙》 假設$f(x)$爲三次多項式，且已知$f(0)=1$，$f(1)=9$，$f(2)=8$，$f(3)=4$，求$f(4)$。此題死背「拉格蘭日插值法」解，不但較快，且不必分析思考即可解得，可能無法達到預定的評量目的（請見4試題內容研討）。

(2) 選擇題《丁》 在一個袋子裡有同形、同質的卡片52張，每張卡片上各有一個1至52的不同號碼。今自袋中任意同時抽出兩張卡片，若卡片上兩個號碼的和恰爲36的機率是P，則$\frac{1}{P}$爲

(A) 3的倍數 (B) 5的倍數 (C) 7的倍數
(D) 11的倍數 (E) 13的倍數

說明 此試題本身很適合考社會組學生，然其缺失爲所問選擇題，不恰當，造成無法測出學生眞正的程度。

因倘考生以

$$P=\frac{35}{52\ C_2}=\frac{35}{51\times 26}$$

$$\therefore \frac{1}{P}=\frac{51\times 26}{35}\notin N$$

則無法找到答案。

當然考生會立即改爲

$$P=\frac{17}{52\ C_2}$$

$$\therefore \frac{1}{P}=78\in N$$

即可找出答案。與一開始就以

$$P=\frac{17}{52\ C_2}$$

解題的考生得到同樣的10分，有失公平，倘此題改爲計算題就相差10分之多了。

3.試題內分佈與配分（以東華本爲主）

冊　別	分 數	內　容　分　佈
第一冊	15分	①實數系（5分） ②多項函數（10分）
第二冊	15分	③不等式證明（10分） ④對數與實數系（5分）
第三冊	25分	⑤三角函數（20分） ⑥直線（5分）
第四冊	15分	⑦圓與球（10分） ⑧直線與橢圓（5分）
第五冊	10分	⑨機率論（10分）
第六冊	20分	⑩方程式論與行列式20分

註： 此表僅供參考，因有些試題綜合命題，難分冊別，然筆者認爲試題分佈與配分非常合理。

4.試題內容研討

今筆者將解法較特別之試題提出與讀者共同研習參考

《丙》大題

假設$f(x)$爲三次多項式且已知$f(0)=1$，$f(1)=9$，$f(2)=8$，$f(3)=4$，$y=f(4)$，則y滿足：

(A) $y\leqslant 0$

(B) $|y|\in\{6,8\}$

(C) $|y|\in\{4,5,7\}$

(D) $|y|\in\{2,3,6,7\}$

(E) $|y|\in\{1,3,5,7,9\}$

（複選，10分；答錯倒扣$\frac{10}{18}$分）

解法一：

因 $f(x)$ 爲三次多項式，令

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

由已知

$f(0)=1 \Rightarrow d=1$ ……………①

$f(1)=9 \Rightarrow a+b+c+d=9$ ……………②

$f(2)=8 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=8$ ……………③

$f(3)=4 \Rightarrow 27a+9b+3c+d=4$ ……………④

①分別代入②，③，④得

$$\begin{cases} a+b+c=8 & \cdots\cdots⑤ \\ 8a+4b+2c=7 & \cdots\cdots⑥ \\ 27a+9b+3c=3 & \cdots\cdots⑦ \end{cases}$$

⑥－⑤×2得

$6a+2b=-9$ ……………⑧

⑦－⑤×3得

$24a+6b=-21$ ……………⑨

⑨－⑧×3得 $6a=6$

$\therefore a=1$ 代入⑧⑨得

$b=-\dfrac{15}{2}$，$c=\dfrac{29}{2}$

$\therefore f(x)=x^3-\dfrac{15}{2}x^2+\dfrac{29}{2}x+1$

$\therefore f(4)=64-120+58+1=3$

$\therefore y=3$

答：(D)(E)

解法二：（請見分析①）

利用餘式定理

令所求爲

$f(x)=Ax(x-1)(x-2)+Bx(x-D+Cx+1$

$\because f(1)=C+1=9$

$\therefore c=8$

$f(2)=2B+16+1=8$

$\therefore B=-\dfrac{9}{2}$

$f(3)=6A-\dfrac{9}{2}\times 3\times 2+8\times 3+1=4$

$\therefore 6A-27+25=4$

$\therefore 6A=6$　$\therefore A=1$

$\therefore f(x)=x(x-1)(x-2)-\dfrac{9}{2}x(x-1)+8x+1$

$\therefore f(4)=4\times 3\times 2-\dfrac{9}{2}\times 4\times 3+8\times 4+1=3$

答：(D)(E)

分析①（餘式定理之應用）

設 $x-a$ 除 $f(x)$ 得餘式爲 $f(a)$

$x-b$ 除 $f(x)$ 得餘式爲 $f(b)$

$x-c$ 除 $f(x)$ 得餘式爲 $f(c)$

$x-d$ 除 $f(x)$ 得餘式爲 $f(d)$

餘類推

$\Rightarrow$ ① $f(x)=\underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{二個因式}}q(x)+A\underbrace{(x-b)}_{\text{一個因式}}+\underbrace{f(a)}_{\text{以}(x-a)\text{除}f(x)\text{的餘式}}$

（即以 $(x-a)$ 除 $f(x)$ 得 $f(a)$ 爲主）

說明 設 $f(x)=(x-a)(x-b)\ q(x)+mx+n$

$\because f(a)=ma+n$ ………①

$f(b)=nb+n$ ………②

由①②得 $m=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$， $n=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

代入上式得

$$mx+n=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

$$=\frac{f(a)-f(b)}{(a-b)}(x-a)+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}+a\frac{f(a)-b(b)}{(a-b)}$$

$$=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+\frac{bf(a)-af(b)-af(b)+af(b)}{b-a}$$

$$=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+\frac{f(a)(b-a)}{b-a}$$

$$=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+f(a)$$

令 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=A$ 代入上式

得 $mx+n=A(x-a)+f(a)$

$$\therefore f(x)=(x-a)(x-b)\ q(x)+A(x-a)+f(a)$$

同理亦可書爲

$$f(x)=\underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{二個因式}}\ q(x)+A\underbrace{(x-b)}_{\text{一個因式}}+\underbrace{f(b)}_{\text{以}(x-b)\text{除}f(x)\text{的餘式}}$$

②$f(x)=\underbrace{(x-a)(x-b)(x-c)}_{\text{取三個因式}}q(x)+A\underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{二個因式}}+B\underbrace{(x-a)}_{\text{一個因式}}$

$+\underbrace{f(a)}_{\text{以}(x-a)\text{除}f(x)\text{的餘式}}$

即 $f(x)$ 以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除之的餘式可設爲

$$r(x)=A(x-a)(x-b)+B(x-a)+f(a)$$

同理亦可書寫如下

$$f(x)=\underbrace{(x-a)(x-b)(x-c)}_{\text{三個因式}}q(x)+A\underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{二個因式}}$$

$$+B\underbrace{(x-b)}_{\text{一個因式}}+\underbrace{f(b)}_{\text{以}(x-b)\text{除}f(x)\text{的餘式}}$$

即 $f(x)$ 以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除之的餘式亦可設爲

$$r(x)=A(x-a)(x-b)+B(x-b)+f(b)$$ （讀者自習）

餘類推之

解法三： 請見分析②

令所求爲 $f(x)=\dfrac{1}{(0-1)(0-2)(0-3)}(x-1)(x-2)(x-3)$

$$+\frac{9}{(1-0)(1-2)(1-3)}(x-0)(x-2)(x-3)$$

$$+\frac{8}{(2-0)(2-1)(2-3)}(x-0)(x-1)(x-3)$$

$$+\frac{4}{(3-0)(3-1)(3-2)}(x-0)(x-1)(x-2)$$

則

$$f(4)=\frac{1}{-6}(4-1)(4-2)(4-3)+\frac{9}{2}(4-0)(4-2)(4-3)$$

$$+\frac{8}{-2}(4-0)(4-1)(4-3)+\frac{4}{6}(4-0)(4-1)(4-2)$$

$$=\frac{1}{-6}\cdot 3\cdot 2\cdot 1+\frac{9}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot 1-4\cdot 4\cdot 3\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 3\cdot 2$$

$$=-1+36-48+16$$

$$=3$$

答：(D)(E)

分析②（餘式定理之應用）

設 $x-a$ 除 $f(x)$ 得餘式 $f(a)=A$

$x-b$ 除 $f(x)$ 得餘式 $f(b)=B$

$x-c$ 除 $f(x)$ 得餘式 $f(c)=C$

餘類推

$$\Rightarrow ①\ f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+\underbrace{\frac{A}{a-b}(x-b)+\frac{B}{b-a}(x-a)}$$

表 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 之餘式

說明① 設 $f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+mx+n$

因 $f(a)=ma+n=A$ ……①

$f(b)=mb+n=B$ ……②

由①②得

$$m=\frac{A-B}{a-b},\qquad n=\frac{bA-aB}{b-a}$$

故 $$f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+\left(\frac{A-B}{a-b}\right)x+\left(\frac{bA-aB}{b-a}\right)$$

$$=(x-a)(x-b)q(x)+\left(\frac{A}{a-b}x+\frac{-bA}{a-b}\right)$$

$$+\left(\frac{B}{b-a}x+\frac{-aB}{b-a}\right)$$

$$=(x-a)(x-b)q(x)+\underbrace{\frac{A}{a-b}(x-b)+\frac{B}{b-a}(x-a)}$$

說明② 設 $f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+t(x-a)+A$

$\because\ f(b)=t(b-a)+A=B$

故 $t=\dfrac{B-A}{b-a}$ 代入原式

得 $$f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+\frac{B-A}{b-a}(x-a)+A$$

$$=(x-a)(x-b)q(x)+\frac{B}{b-a}(x-a)$$

$$+\frac{A}{a-b}(x-a)+A$$

$$=(x-a)(x-b)q(x)+\frac{B}{b-a}(x-a)$$

$$+\frac{A}{a-b}(x-a+a-b)$$

$$=(x-a)(x-b)q(x)+\underline{\frac{B}{b-a}(x-a)+\frac{A}{a-b}(x-b)}$$

討論 設 $f(x)$ 爲一次數且 $f(a)=A$，$f(b)=B$，則由上式知 $q(x)=0$

得 $$f(x)=\frac{B}{b-a}(x-a)+\frac{A}{a-b}(x-b)$$

② $$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)+\underline{\frac{A}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)}$$

$$\underline{+\frac{B}{(b-c)(b-a)}(x-c)(x-a)+\frac{C}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)}$$

$f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 之餘式

說明 令 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)+p(x-a)(x-b)$

$+q(x-b)(x-c)+r(x-c)(x-a)$

$\Rightarrow\ f(c)=p(c-a)(c-b)=C \quad \therefore p=\dfrac{C}{(c-a)(c-b)}$

$f(a)=q(a-b)(a-c)=A \quad \therefore q=\dfrac{A}{(a-b)(a-c)}$

$f(b)=r(b-c)(b-a)=B \quad \therefore r=\dfrac{B}{(b-a)(b-c)}$

將代入上式，則爲所求。

討論 設 $f(x)$ 爲二次式且 $f(a)=A$，$f(b)=B$，$f(c)=C$，則由上面之說明得 $q(x)=0$

故 $$f(x)=\frac{A}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)$$

$$+\frac{B}{(b-c)(b-a)}(x-c)(x-a)$$

$$+\frac{C}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$

註：由上面之分析得知

若 $f(x)$ 爲三次式且 $f(a)=A$，$f(b)=B$，$f(c)=C$，$f(d)=D$，則

$$f(x)=\frac{A}{(a-b)(a-c)(a-d)}(x-b)(x-c)(x-b)$$
$$+\frac{B}{(b-c)(b-d)(b-a)}(x-c)(x-d)(x-a)$$
$$+\frac{C}{(c-d)(c-a)(c-b)}(x-d)(x-a)(x-b)$$
$$+\frac{D}{(d-a)(d-b)(d-c)}(x-a)(x-b)(x-c)$$

非選擇題第 2 大題第(ii)小題

證明 $\log_{10}2+\log_{10}3+\log_{10}5$ 爲無理數

解法一：

①由對數性質知

$\log_{10}2+\log_{10}5=\log_{10}10=1$

是有理數。

②今證 $\log_{10}3$ 爲無理數（仿上題解法一，用間接證法令 $\log_{10}3$ 是有理數，取 $\log_{10}3=\dfrac{q}{p}$，其中 p，q 爲互質的正整數，由對數性質知 $3=10^{\frac{q}{p}}$ 兩邊 p 次方得 $3^p=10^q \Rightarrow 3\times3^{p-1}=10^q$

其中 3^{p-1} 爲正整數，故 10^q 爲 3 的倍數，但 $\underline{10^q=2^q\cdot5^q}$ 不爲 3 的倍數，故矛盾。$\therefore \log_{10}3$ 爲無理數。

③次證 $1+\log_{10}3$ 爲無理數

設 $1+\log_{10}3=\dfrac{n}{m}$ 爲有理數，其中 m，n 爲互質的正整數

$\Rightarrow \log_{10}3=\dfrac{n}{m}-1$

爲有理數與 $\log_{10}3$ 爲無理數不合

故 $1+\log_{10}3$ 爲無理數，即 $\log_{10}2+\log_{10}3+\log_{10}5$ 爲無理數。

解法二：

前面證明過程同＜解法一＞。

因 $3=10^{\frac{q}{p}} \Rightarrow 3^p=10^q \Rightarrow 3\times3^{p-1}=10^q$

$p-1$ 爲正整數 $\Rightarrow 10^q$ 爲 3 的倍數 ………①

但 $10^q=(3k+1)^q=3t+1$

（二項式定理展式）但 t 爲整數

$\therefore 10^q$ 不爲 3 的倍數 ………②

由①②知不合，故 $\log_{10}3$ 爲無理數

以下證明同＜解法一＞。

解法三：

＜前面證明過程同解法一＞

因 $3=10^{\frac{q}{p}} \Rightarrow 3^p=10^q$ ………①

但 3^p 爲奇數，10^q 爲偶數，故 $3^p\neq10^q$ …②

由①②知不合，故 $\log_{10}3$ 爲無理數。

＜以下證明過程同解法一＞

解法四：

<前面證明過程同解法一>

設 $\log_{10}3$ 是有理數，取 $\log_{10}3=k$，k 為有理數

由對數性質知 $10^k=3$ …………①

因 3 與 10 互質故 3 與 10^k 互質，故

$10^k \neq 3$ …………②

由①②知 $\log_{10}3$ 為無理數

<以下部分證明過程同解法一>

討論 ①解法四為誤解，請讀者注意，因有些考生用此種解法。

②其理由為

若 3 與 10 互質，則 3 與 10^k 亦互質，必當 k 為整數始成立。

非選擇題第 4 大題

有一個三角形，其三邊分別為 a，b，c，其面積為 Δ，試證

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

解法一：

由餘弦定律知

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B} \qquad \because 0<B<\pi \qquad \therefore \sin B>0$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2ac}\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2ac}\sqrt{[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]}$$

$$=\frac{1}{2ac}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}$$

$$=\frac{1}{2ac}\sqrt{2s\cdot(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}$$

$$=\frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$\left(\begin{array}{l} \because a+b+c=2s \\ \therefore a+c-b=2s-2b \\ \text{同理} \\ a+b-c=2s-2c \\ b+c-a=2s-2a \end{array}\right)$

又 $\Delta=\frac{1}{2}ac\sin B$

$$=\frac{1}{2}ac\cdot\frac{2}{ac}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

解法二：

設ΔABC的三個頂角爲α，β，γ，其對應邊長分別爲a，b，c，則

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}bc\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

又 $$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\therefore\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}$$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

$$\because\quad a+b+c=2s$$

$$\therefore\quad s-b=\frac{a+c-b}{2}$$

$$s-c=\frac{a+c-b}{2}$$

代入上式，得

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\because 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\sin\frac{\alpha}{2}>0$$

$$\therefore\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdots②$$

同理可證

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\quad\cdots\cdots\cdots③$$

②，③代入①，得

$$\Delta=bc\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\therefore\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

解法三：

由三角形解法之　角公式得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

又由面積公式知

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin x$$

$$=bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=bc\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

本題說明：

此題係爲證明題，證明過程要嚴密，在此三種解法中以<解法一>最嚴密，<解法二>雖可行，然純代公式不夠嚴密，無法得高分，希望考生注意。

—本文作者任教於新化高中—