問題詳解

8201 擬(矩)陣問題(張鎭華提供)

一個擬(矩)陣是一個有序對$M=(E, \boldsymbol{B})$,其中E是有限集合,

$$\phi \neq \boldsymbol{B} \subseteq 2^{E} \equiv \{S : S \subseteq E\}$$

並滿足"$S, T \in \boldsymbol{B}$, $x \in S \setminus T \Rightarrow \exists y \in T \setminus S$ 使得$(T \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \boldsymbol{B}$"。假設$E=A \cup B$,其中$A=\{a_1, \cdots, a_n\}$且$B=\{b_1, \cdots, b_n\}$是不相交的兩個集合,試求一個擬陣$M^*=(E, \boldsymbol{B}^*)$使得$A \in \boldsymbol{B}^*$, $B \in \boldsymbol{B}^*$

解答:(張鎭華提供)

假設$M=(E, \boldsymbol{B})$是滿足$A \in \boldsymbol{B}$, $B \in \boldsymbol{B}$的擬陣,對任意$S \subseteq A$,可由歸納法證明:存在某個$X \in \boldsymbol{B}$使得$A \cap X=S$。當$|S|=0$時,取$X=A$。假設$|S|=k-1$時成立,考慮$|S|=k$的情況,取$x=S$,由歸納法假設,存在$X' \in \boldsymbol{B}$使得$A \cap X'=S \setminus \{x\}$;由擬陣的定義,對於$A$, $X' \in \boldsymbol{B}$及$x \in A \setminus X'$,存在$y \in X' \setminus A$,使得$X=(X' \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \boldsymbol{B}$,很容易知道$A \cap X=S$, 所以得

證。

由以上結論可見 $|\boldsymbol{B}| \geq |2^A| = 2^n$ 。

現在要構造一個擬陣 $M^* = (E, \boldsymbol{B}^*)$ ，使得 $|\boldsymbol{B}^*| = 2^n$ 而且 $A, B \in \boldsymbol{B}^*$ 。假設 $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 且 $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ ，令 $\boldsymbol{B}^* = \{S \subseteq E ; \forall i, |S \cap \{a_i, b_i\}| = 1\}$ ，則顯然 $|\boldsymbol{B}^*| = 2^n$ 而且 $A, B \in \boldsymbol{B}^*$ 。其次證明 $(E, \boldsymbol{B}^*)$ 是一擬陣：假設 $S, T \in \boldsymbol{B}^*$ ， $x \in S \setminus T$ ，則存在某個 i 使得 $x = a_i$ 或 $x = b_i$ ；當 $x = a_i$ 時， $b_i \notin S$ ，因爲 $a_i \notin T$ ，所以 $b_i \in T$ ，取 $y = b_i \in T \setminus S$ ，則顯然 $(T \setminus \{y\} \cup \{x\} \in \boldsymbol{B}^*$ ；當 $x = b_i$ 時，同理可證。