對局論簡介(上)

——2人0和對局開始

賴漢卿

1.一般說明

對局論在現代經濟競爭之狀態下，具有很重要的地位。這一門學問是最佳化論中之一枝，也可以說是作業研究中的一重要課題之一。它分成2人0和，n人協力，以及n人非協力等對局問題。解對局問題就像解微分方程式一樣，在理論上常涉及解的存在與唯一性的問題。對局論中，所謂其解就是每位與局者，都能尋找到自己的最佳策略。在各與局者之最佳策略所成之點，稱爲對局的平衡點(equilibrium point)，伴隨平衡點決定一個值，也就是定義於各與局者的策略空間之一函數(稱之爲**對局函數**)，在平衡點的函數值，稱爲**對局值**。解對局問題即以求平衡點，即各與局者的最佳策略，以及其對局值。平衡點的存在性與唯一性，就像一個微分方程式的解之存在性與唯一性的問題。因此對局問題，隨著各種情況因素，其解就有很大的變化，所以對局問題就像微分方程那樣，似乎永遠做不完。題目的來源與發現，常隨經濟的繁榮，以及工業的發達，科技的進步，而愈積愈多。換句話說，其源來自實用的問題。但其解法，說明與技巧却完全決定於數學，盡管數學本身被指爲抽象的產物，它一直是取自實用；在本身所處的世界裏，用自己的方法解出後，再還報於實用，或說明它。

在2人0和有限對局中，矩陣或線性代數是很有效的工具。在無限的對局中，測度與積分論也就是實變數函數論是主要的工具，更上一層的對局論，則是泛函分析的技巧。因此研究對局論可由線性代數，實變函數論及泛函分析一線而上來，當然其中也含有凸分析，超平面等線性空間中所附屬的部分。下面我們先稍作對局論的介紹。

含有兩個以上的行動主體間，具有利害關係相互對立競爭的狀態下，這些主體各想自己決定其行動(方法，策略或說戰略等)，而用數學模式的理論來處理時，就是所謂的對局論(Game theory)。

含兩個以上參與競爭狀態之主體的例子有許多。諸如經濟、社會、政治或軍事各方面等，都是我們日常生活之周圍所常見的。像這種

競爭的狀態，如軍事攻擊時的天候，玩撲克牌的分配情況，股票市場的指數升降等，常常含有偶然發生（即未能在事先確知）之因素存在。可是在所有競爭狀態中，每個與局者，都想用合理的方法，來決定（選擇）他自己的行動，俾自己獲致最大利益。

對局中的策略概念是 1921 年，在 Emile Borel 的論文中最先出現的名稱。而 John von Neumann 在 1928 年所發現的 min-max 定理，則是今日對局論的數學方法之基石。到 1944 年 Neumann 及 Morgenstern 兩人共著一書 " Theory of Games and Economic Behavior " —對局與經濟行為的理論，其中提供了在競爭狀態中，要尋找合理性之策略的數學新方法，乃引起許多數學家的關心與興趣。這本書雖然以對局論說明了經濟事象，但後來都不只在經濟方法，就是在軍事、政治各方面，類似對局之競爭狀態的問題，也都應用對局論來尋找其最佳的策略。到今天的對局論，乃以位相空間的數學分析之抽象理論來處理，而得有更輝煌的貢獻。

對局論對現代的數理統計，作業研究等有很大的影響。在 A. Wald 的統計問題中，考慮 2 人 0 和的問題，而發展成為統計上的決策理論（Decison theory）。在 1950 年，D. Dantzig 也說明了對局論與線性規劃（Linear Programming），有著極密切的關係，因而使線性規劃更形完備。最重要的是對局論是作業研究中，做為行動決定（deeision making）的一重要指南針。

2. 2人0和對局

在對局論中最簡單的數學模式是2人0和的有限對局，也就是矩陣型對局。我們今天就以 2 人 0 和來說明對局論的概念。

構成 2 人 0 和對局，應含有 4 種因素。

(1)與局者（player）是 2 人，今後分別用 Ⅰ、Ⅱ 表示。

(2)兩個與局者，各有他自己所允許的策略範圍，從中選擇自己的策略（strategy），做為他自己行動決定的指南。也就是 Ⅰ 與 Ⅱ 分別有他自己的策略空間去選取自己所要的策略。

(3)當 Ⅰ 與 Ⅱ 各自選定策略後，就做決定（decision），此時稱為進行對局（play）。

(4)在對局進行後，就有結果（outcome）產生。怎樣的對局，就產生怎樣的結果，是在事先就給定了規則（rule）。一般所生的結果，在既定的規則下，第 Ⅱ 與局者給第 Ⅰ 與局者某規定的額款，稱之為利得（payoff）。

用數學模式來敍述這種對局，乃是將這種概念抽象化，此時各種策略稱為純策略（pure strategy）。我們可用下面方式來說明；設

$X=$ 表示 Ⅰ 所有的策略空間。

$Y=$ 表示 Ⅱ 所有的策略空間。

$f(x, y): X\times Y\rightarrow R$ 是有界實數值函數。

f 表示對局所約定的規則。

當 Ⅰ 取他的策略 $x\in X$，而 Ⅱ 取其策略 $y\in Y$ 時，都在不知對方所要取之策略下進行對局；換句話說他們各自選擇的策略是互相獨立的，在 Ⅰ 取定 x，而 Ⅱ 取定 y 時，兩人進行對局，其結果乃按規約 f，產生之值 $f(x, y)$。此時 Ⅱ 得支付給 Ⅰ 之數額為 $f(x, y)$，稱為**利得函數**。

從這一段說明，我們知道第 Ⅰ 與局者，要在他的策略空間 X 中選取他最佳的策略 x，使 $f(x, y)$ 能達最大，而 Ⅱ 則要從 Y 中選取他最佳的策略 y，使 $f(x, y)$ 能出現最小值。不論如何，兩人獲得之總額和為 0，因之把這種對局稱之為2人0和對局。以式子表示的話，Ⅰ 贏得 $f(x, y)$，而 Ⅱ 贏得 $-f(x, y)$（即 Ⅱ 輸了 $f(x, y)$），但兩人所得之和，不論那個 $x\in X$ 及那個 $y\in Y$，都是

$$f(x, y)+(-f(x, y))=0$$

因此 2人0和對局，可用一組含三個要素之集

合表示成

$$\{X, Y, f(x, y)\} \tag{1}$$

其中 $f(x, y)$，$(x \in X、y \in Y)$ 是利得函數 (payoff function)。

3.矩陣對局

設X與Y表示有限集合時，對局(1)稱爲**有限對局**(finite game)， 我們可設

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, \cdots, x_m\} \\ Y &= \{y_1, \cdots, y_n\} \end{aligned} \tag{2}$$

並將$f(x_i, y_j)$記爲a_{ij}， 則 2 人 0 和對局(1)就由$m \times n$ 矩陣

$$A = [\, a_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n \,] \tag{3}$$

完全解決了。像這種對局稱之爲**矩陣對局**(matrix game)，A就稱爲此對局的**利得局陣** (payoff matrix) 或**給付矩陣**。由於各與局者所採取的策略，都不讓對方知悉，所以當各人在各自的策略空間選取策略時，可允許機率混合於其中。例如 I 選取策略 x_i 的機率爲 p_i，$i = 1, 2, \cdots, m$，即

$$0 \leqslant p_i \leqslant 1 \ (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \text{。}$$

這種情形成爲第 I 與局者的**混 合策略**(mixed strategy)：

$$p = < p_1, \cdots, p_m >$$

同樣地，第 II 與局者的混合策略爲

$$q = < q_1, \cdots, q_n > \text{。}$$

於是 p 是一機率m-向量，q 是一機率 n-向量。p，q 分別是第 I，第 II 與局者的**混合策略**。其策略空間分別以

$$P_m = \{ p \mid p = < p_1, \cdots, p_m > \}$$

$$Q_n = \{ q \mid q = < q_1, \cdots, q_n > \}$$

表示。當兩人分別取其混合策略 $p \in P_m$ 及 $q \in Q_n$ 時，則對局函數 (即利得期望值) 爲

$$\begin{aligned} f(p, q) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, p_i q_j \\ &= pAq \end{aligned} \tag{4}$$

註：對局函數與利得函數以同樣記號f表示該不致混淆。事實上(4)是

$$\begin{aligned} & f(p, q) \\ &= \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \, p_i q_j \end{aligned} \tag{4}$$

一般矩陣對局是指

$$\{ P_m, Q_n, f(p, q) \} \tag{5}$$

下面我們舉幾個例子來說明 2 人 0 和對局。

例1　甲、乙兩人各取十元銅板一個，規定出示銅板時，同正面或同反面，則乙該輸給甲十元，否則甲輸給乙十元。像這種純策略對局，可由下面利得矩陣完全決定

$$\begin{array}{c} \\ \text{正面} \\ \text{反面} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{正面} & \text{反面} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

如果考慮混合策略，則甲、乙兩人的機率向量爲：

$$p = < p_1, \ 1 - p_1 >$$

$$q = < q_1, \ 1 - q_1 >$$

此時對局函數 (即甲獲勝的期望值) 爲

$$\begin{aligned} & f(p, q) \\ &= [\, p_1, 1 - p_1 \,] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ 1 - q_1 \end{bmatrix} \\ &= (1 - 2p_1)(1 - 2q_1) \end{aligned}$$

注意：本例題的 $p_1 = \dfrac{1}{2}$，$q_1 = \dfrac{1}{2}$，故他們的期望值應該是 0 。

例2　如例 1 以甲、乙兩人猜拳，而石頭、剪刀、布出現的 3 種純粹策略矩陣爲：

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{石頭} & \text{剪刀} & \text{布} \\ \hline \text{石頭} & & & \\ \text{剪刀} & & & \\ \text{布} & & & \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

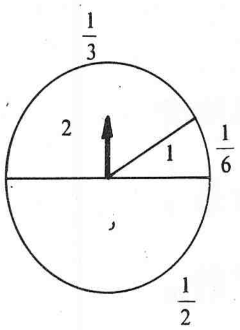
勝者可由輸者獲得十元。如果考慮共同的混合戰術，則其機率向量為

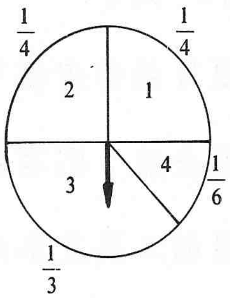
$$p = \langle p_1, p_2, 1 - p_1 - p_2 \rangle$$
$$= \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$$
$$q = \langle q_1, q_2, 1 - q_1 - q_2 \rangle$$
$$= \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$$

故對所有 p，q，其期望值（利得函數）為

$$f(p, q) = 0$$

例3 設有兩個圓盤 A，B 如下圖所示，分別由甲、乙兩人，做為策略空間（集合），他們要選取的策略，以旋轉圓盤，以其指針所指方向的位置而做成如表中之規定：





	乙 1	乙 2	乙 3	乙 4
甲 1	3	5	−2	−1
甲 2	−2	4	−3	−4
甲 3	6	−5	0	3

$$p_1 = \frac{1}{6} \quad p_2 = \frac{1}{3} \quad p_3 = \frac{1}{2}$$

$$q_1 = \frac{1}{4} \quad q_3 = \frac{1}{3}$$

$$q_2 = \frac{1}{4} \quad q_4 = \frac{1}{6}$$

表中之數字表示乙付給甲的款數（正數表示甲所得，負數表示乙所得），於是

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p = \langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle$$

$$q = \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \rangle$$

甲得勝之點數的期望值為

$$f(p, q)$$
$$= \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_i$$
$$= pAq^t$$

$$= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{13}{72} = 0.18 > 0$$

乙得勝之期望值為

$$-f(p, q) = -0.18$$

因此這個對局對甲方較有利。

—本文作者任教於清華大學數學系—