以反射計算爲工具討論平面幾何（Ⅲ）

許振榮

(22) $a(bad)^2a(dab)^2=1$，

且 $(bad)^2 \neq 1$

<=> a，b，d 所成的三角形爲一等腰三角形，而 b，d 二邊爲相等。

注意： 如果 $(bad)^2=1$ 成立，則第一條件恒等地成立。

先注意：$(bad)^2(dab)^2$

$$= bad\,b\overbrace{\underbrace{adda}}b\,dab$$

$$=1$$

成立。故

$$(bad)^2=[(dab)^2]^{-1}$$

成立。因此，所給的第一條件可寫成

$$a^{(dab)^2}=a$$

之形狀。此地，$(dab)^2$ 爲一平移（因移射之平方爲一平移）。設 $(dab)^2=\tau$，則 $a^\tau=a$ 即 $a\tau=a$ 成立。故 a 與平移 τ 之方向平行。

如果 $dab=kV$，則 $a\perp k$（因 a 與 dab 之軸平行）故 ak 爲一點 U。即

$$U=ak=ka$$

此時

$$adab=akV=UV$$

爲一由向量 $2\overrightarrow{UV}$ 所表示的平移。今在 $adab$ 中是否 ad 爲一平移？如果 ad 爲一平移，則

$$ab=(da)(UV)$$

亦爲一平移。故 $a\parallel b$，$a\parallel d$ 成立。此時可得 $(bad)^2=1$。此式與假定不合。因此 ad 和 ab 均爲廻轉。

另一方面，$adab=d^ab$，又 d^a 爲一直線。因爲 $adab=d^ab$ 爲一平移，故 d^a 與 b 平行，即 $d^a\parallel b$。因爲 ad 和 ab 均爲廻轉

廻轉 ba 之廻轉角

＝廻轉 $d^aa=(da)^a$ 之廻轉角

＝廻轉 ad 之廻轉角

現在 $b\parallel d$，$b\perp a$，$d\perp a$ 的情形亦可能發生。因在此情形下

$$a(bad)(bad)a(dab)(dab)$$

$$=(ab)(ad)(ba)(da)(dba)(adb)$$

$$=(bd)(bd)(db)(db)$$

$$=(bd)^2(db)^2$$

$$=1$$

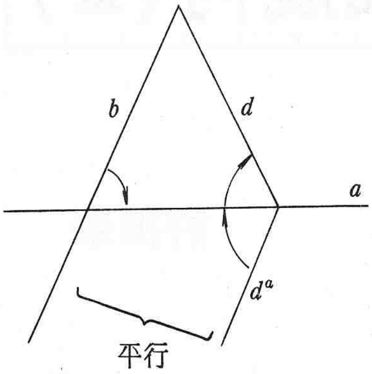
及

$$(dab)(dab)=(dba)(adb)$$

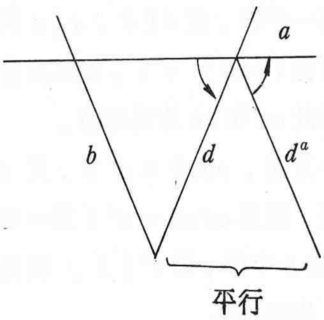
$$=(db)^2\neq 1$$

二個關係在 $b \neq d$ 之條件下成立之故。要除去此情形我們要假設 $(bdZ)^2 \neq 1$，即 b 與 d 不平行的條件。

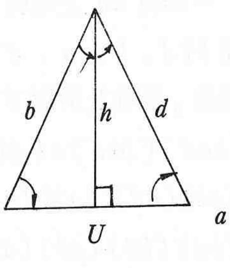
如果我們除掉如此情形，則由上面的討論可得下列的結論：即在由三直線 a，b，d 所成的三邊形中 b 和 d 二邊爲等長（因爲二底角相等）（第 26 圖）。



第 26 圖



第 27 圖



第 28 圖

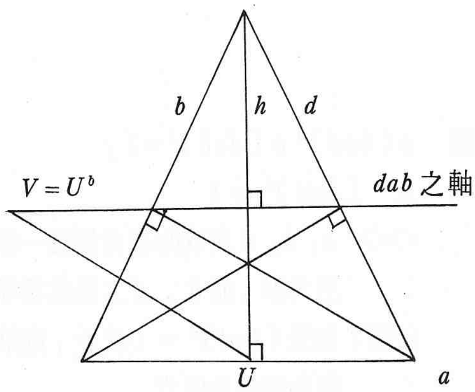
此地，我們也要注意如第 27圖的情形亦可能發生。現在假設 h 爲 b，d 二直線所成的角的平分線（第 28 圖），則 $hb = dh$ 成立。故 $dhb = h$。此時 $a \perp h$ 成立，故 ah 爲點 U。即

$$U = ah = ha$$

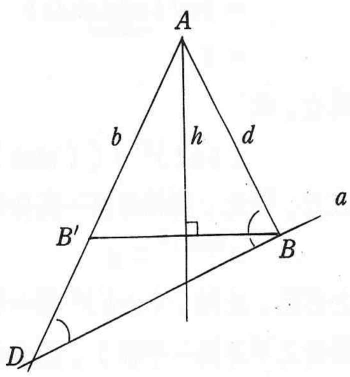
此時，若令 $V = U^b$，則得

$$\begin{aligned} dab &= d(hh)ab \\ &= (dhb)(bhab) \\ &= (hbb)(bhab) \\ &= h(bhab) \\ &= hU^b \\ &= hV \end{aligned}$$

故移射 dab 之軸爲從 V（即 U^b）至直線 h 所下的垂線（第 29 圖）。



第 29 圖



第 30 圖

我們也想注意：如果 $\measuredangle B = \measuredangle D$，又 h 爲 b，d 所成的角 $\measuredangle A$ 之平分線（第30圖），而在直線反射 h 之下點 B 之像點爲 B'，則 $B' = D$。爲證明此事實，假設 $AD > AB'$。則

$$\measuredangle ABB' = \measuredangle ABD - \measuredangle B'BD$$
$$= \measuredangle ADB - \measuredangle B'BD$$
（因 $\measuredangle B = \measuredangle D$）

又

$$\measuredangle ABB' = \measuredangle AB'B$$
$$= \measuredangle ADB + \measuredangle B'BD$$

因之，可得

$$\measuredangle ADB - \measuredangle B'BD$$
$$= \measuredangle ADB + \angle B'BD$$

由此式可得

$$\measuredangle B'BD = 0$$

故 $B' = D$ 。因此，$a \perp h$ 成立。

(23) $abCAbcABcaBC = 1$

$(abc)^2 \neq 1$

$(abZ)^2 \neq 1$（即 $a \nparallel b$）

$<=>$ 以 a, b, c 爲三邊的三角形與以 A，B，C 爲頂點的三角形爲直接地相似（即邊 a, b, c 之對頂點之繞法方向與 A，B，C 之繞法方向相同。

所給的第一條件可寫成

$$CabCAbcABcaB = 1$$

之形狀，亦可寫成

$$bCAbcABcaBCa = 1$$

之形狀。在第二式中 CA 爲由向量 $2\overrightarrow{CA}$ 所表現的一平移。因此

$$bCAb = (CA)^b$$

亦爲一平移。如果令

$$C'' = bCb = C^b, \quad A'' = A^b$$

則因爲

$$bCAb = bCbbAb = C''A''$$

此平移可由 $2\overrightarrow{C''A''}$ 表現。同樣地，令

$$A''' = A^c, \quad B''' = B^c$$
$$B' = B^a, \quad C' = C^a$$

則從條件

$$bCAbcABcaBCa = 1$$

可得

$$2\overrightarrow{C''A''} + 2\overrightarrow{A'''B'''} + 2\overrightarrow{B'C'} = 0$$

即

$$\overrightarrow{C''A''} + \overrightarrow{A'''B'''} + \overrightarrow{B'C'} = 0$$

之關係。今設

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{A'''B'''}$$
$$\overrightarrow{B_0C_0} = \overrightarrow{B'C'}$$
$$\overrightarrow{C_0A_0'} = \overrightarrow{C''A''}$$

則得

$$0 = \overrightarrow{A'''B'''} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C''A''}$$
$$= \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0C_0} + \overrightarrow{C_0A_0'}$$
$$= \overrightarrow{A_0A_0'}$$

因此，可得

$$A_0 = A_0'$$

故

$$\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0C_0} + \overrightarrow{C_0A_0} = 0$$

即三向量 $\overrightarrow{A_0B_0}$ ，$\overrightarrow{B_0C_0}$ ，$\overrightarrow{C_0A_0}$ 成一個閉三角形 $\Delta A_0B_0C_0$。因爲直線反射 c 爲等長變換，又 $A''' = A^c$，$B''' = B^c$，故

$$|\overrightarrow{A'''B'''}| = |\overrightarrow{AB}|$$

另一方面，

$$|\overrightarrow{A'''B'''}| = |\overrightarrow{A_0B_0}|$$

故

$$|\overrightarrow{A_0B_0}| = |\overrightarrow{AB}|$$

因此 $\Delta A_0B_0C_0$ 之三邊與 ΔABC 之三邊等長。故

$$\Delta A_0B_0C_0 \equiv \Delta ABC \text{（全相等）}$$

因此，

$$\measuredangle A_0 = \measuredangle A$$
$$\measuredangle B_0 = \measuredangle B$$
$$\measuredangle C_0 = \measuredangle C$$

等亦成立。

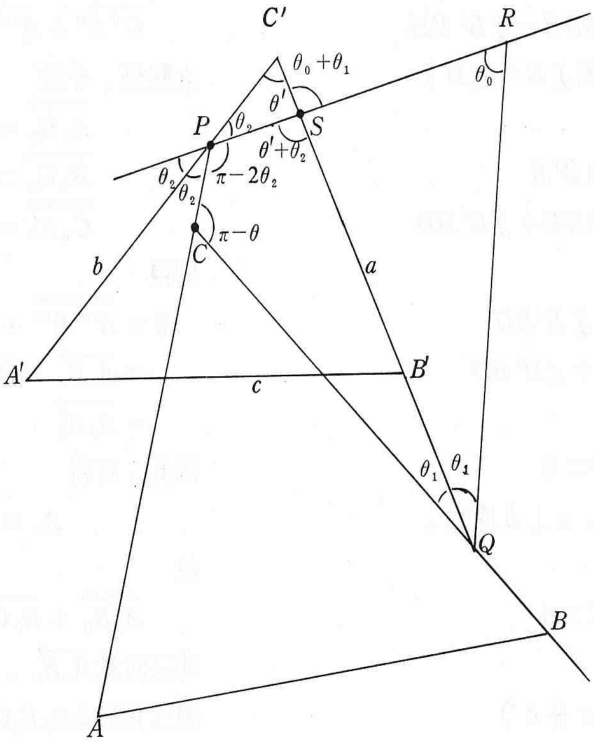
現在我們來證明：如果條件

$$bCAbcABcaBCa = 1$$

成立，則三邊形 Δabc 與三角形 ΔABC 直接地相似。

第一法 設三直線 a, b, c 所成的三邊形 Δabc 之頂點分別爲 A'，B'，C' 。A' 爲邊 a 之對頂點。設

$$\angle C' = \theta', \quad \angle C = \theta$$



第31圖

又二直線 $bCAb$ 和 $aBCa$ 所成的角以 θ_0 表之。

在第31圖中，設 θ_1 為直線 BC 與直線 a 之交角，θ_2 為直線 AC 與直線 b 之交角。因 $\Delta PC'S$ 在點 S 處的外角亦為 ΔQRS 在點 S 處的外角，故有下列關係:

$$\theta'+\theta_2=\theta_0+\theta_1$$

即

$$\theta_0-\theta'=\theta_2-\theta_1$$

又從四角形 $PCQS$ 可得

$$(\pi-\theta)+(\pi-2\theta_2)+(\theta'+\theta_2)+\theta_1=2\pi$$

由此式可得

$$\theta'-\theta=\theta_2-\theta_1$$

因此可得

$$\theta_0-\theta'=\theta'-\theta$$

故

$$\theta_0=2\theta'-\theta$$

而

$$\theta_0-\theta=2(\theta'-\theta)$$

故可得：“$\theta_0=\theta$ 成立之充要條件係 $\theta'=\theta$ 之成立”的結論。

由上面所論得知：條件

$$bCAbcABcaBCa=1$$

成立之條件為

$$\measuredangle A_0=\measuredangle A,\quad \measuredangle B_0=\measuredangle B$$
$$\measuredangle C_0=\measuredangle C$$

之成立。現在我們又知道 $\measuredangle A_0=\measuredangle A$ 成立之條件為 $\measuredangle A'=\measuredangle A$ 即 $\measuredangle(b,c)=\measuredangle A_0$ 之成立。故

$$bCAbcABcaBCa=1$$

成立時

$$\measuredangle(b,c)=\measuredangle A$$
$$\measuredangle(a,c)=\measuredangle B$$
$$\measuredangle(a,b)=\measuredangle C$$

成立。即 Δabc 與 ΔABC 為直接地相似。

第二法　我們先注意下列事情：即如果 τ 為一平移且

$$\Delta ABC\xrightarrow{\tau}\Delta\overline{ABC}$$

則如果

$$b\,C\,A\,b = C'A'$$
$$b\,\overline{C}\,\overline{A}\,b = \overline{C}'\,\overline{A}'$$
$$a\,B\,C\,a = B''C''$$
$$a\,\overline{B}\,\overline{C}\,a = \overline{B}''\,\overline{C}''$$

可得

$$\measuredangle(A'C',\,C''B'')$$
$$= \measuredangle(\overline{A}'\,\overline{C}',\,\overline{C}''\,\overline{B}'')$$

其實，因爲 $CA \parallel \overline{C}\,\overline{A}$，它們在直線反射 b 下之像直線亦有 $C'A' \parallel \overline{C}'\,\overline{A}'$ 之關係成立。同理從 $BC \parallel \overline{B}\,\overline{C}$ 可得 $B''C'' \parallel \overline{B}''\,\overline{C}''$。因之，

$$\measuredangle(A'C',\,C''B'')$$
$$= \measuredangle(\overline{A}'\,\overline{C}',\,\overline{C}''\,\overline{B}'')$$

成立。顯然，對於線分之長度有

$$C'A' = \overline{C}'\,\overline{A}'$$

和 $$B''C'' = \overline{B}''\,\overline{C}''$$

之關係成立。因此，如果

$$\Delta ABC \xrightarrow{\tau} \Delta \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

則由

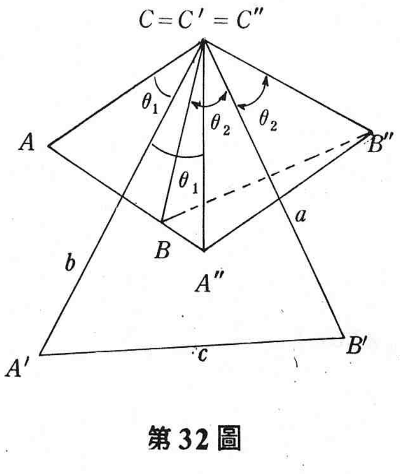
$$b\,C\,A\,b\,c\,A\,B\,c\,a\,B\,C\,a = 1$$

之關係可得

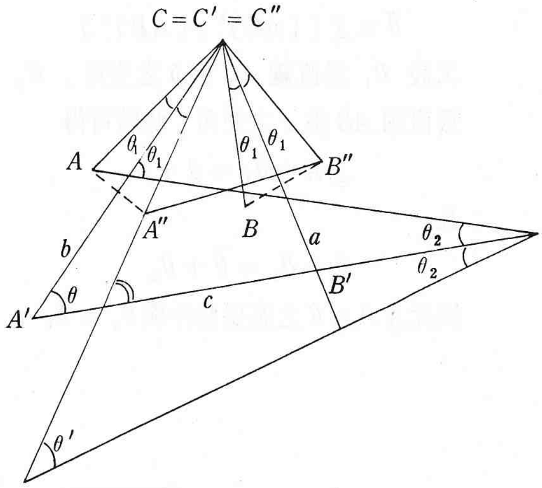
$$b\,\overline{C}\,\overline{A}\,b\,c\,\overline{A}\,\overline{B}\,c\,a\,\overline{B}\,\overline{C}\,a = 1$$

之關係。

由此討論，不妨假設 ΔABC 之頂點 C 與 a, b, c 所成的三邊形之頂點 C'（即邊 c 之對頂點）重合。



第32圖



第33圖

第 32 圖中，設

$$A'' = A^b, \quad B'' = B^a$$

又設 θ_1 爲直線 AC 與 b 之交角，θ_2 爲直線 BC 與 a 之交角，

$$\theta' = \measuredangle(a,\,b)$$
$$\overline{\theta} = \measuredangle A''C''B''$$

則

$$\measuredangle C - \theta_1 + \theta_2 = \theta'$$

且

$$\overline{\theta} = \theta' - \theta_1 + \theta_2$$

因此，可得

$$\theta' - \measuredangle C = \theta_2 - \theta_1$$

和

$$\overline{\theta} - \theta' = \theta_2 - \theta_1$$

故得

$$\overline{\theta} - \measuredangle C = 2(\theta_2 - \theta_1)$$

所以，如果

$$\theta' \neq \measuredangle C$$

則 $$\theta_2 \neq \theta_1$$

而 $$\overline{\theta} \neq \measuredangle C$$

因此，依上面討論，此與假設不合。

如上已證：如果

$$b\,C\,A\,b\,c\,A\,B\,c\,a\,B\,C\,a = 1$$

成立，則 $\theta' = \measuredangle C$ 成立。

在第 33 圖中，設

$$\theta = \measuredangle(b,\,c)$$

$$\bar{\theta}=\measuredangle((AC)^{b},(AB)^{c})$$

又設 θ_1 爲直線 AC 與 b 之交角，θ_2 爲直線 AB 與 c 之交角。此時可得

$$\measuredangle A+\theta_1=\theta+\theta_2$$

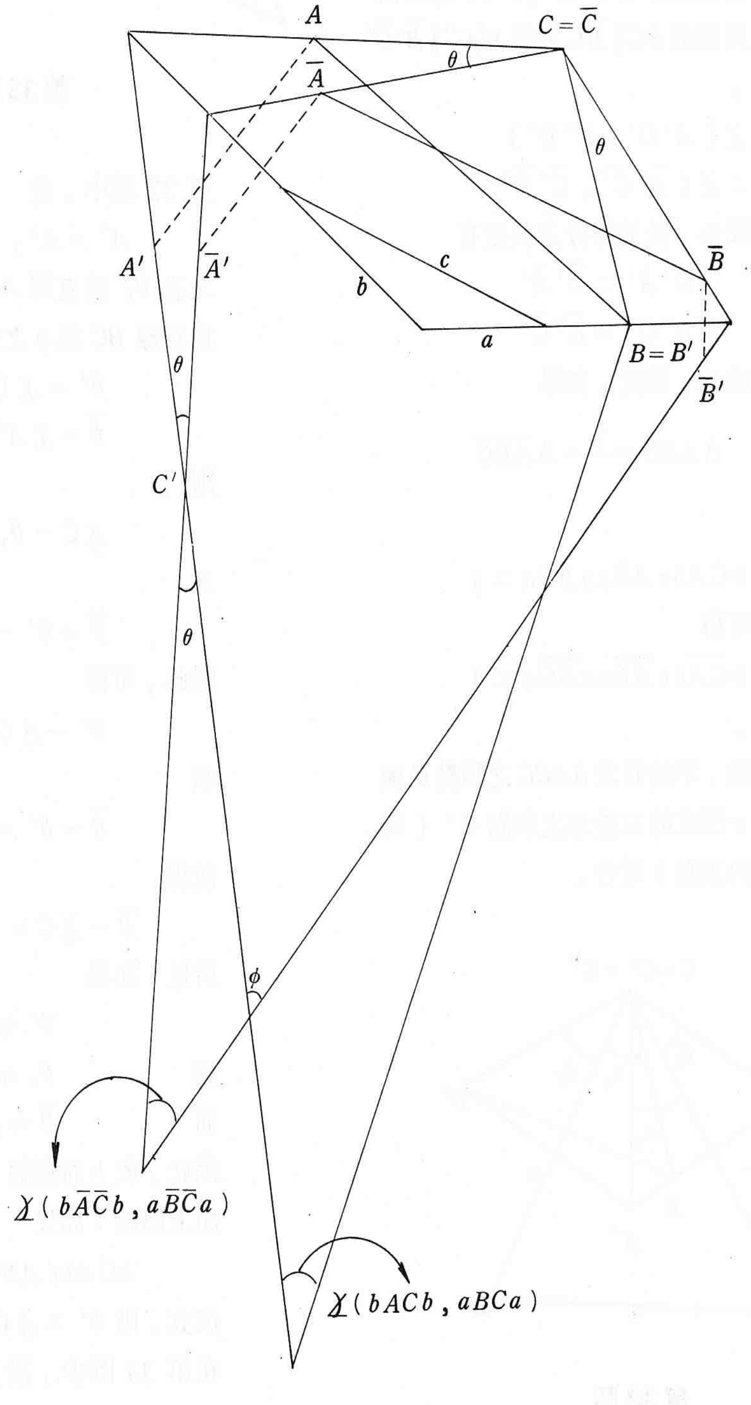
且

$$\theta+\theta_1=\bar{\theta}+\theta_2$$

因此 $\measuredangle A=\theta$ 之充要條件係 $\theta_1=\theta_2$，又 $\theta=\bar{\theta}$ 之充要條件亦爲 $\theta_1=\theta_2$。故 $\bar{\theta}=\theta$ 成立之充要條件係 $\measuredangle A=\theta$ 之成立。因爲已知 $\theta'=\measuredangle C$。故 $\measuredangle A=\theta$ 亦成立時，ΔABC 與三邊形 Δabc 直接地相似。即

$$bCAbcABcaBCa=1$$

成立時 ΔABC 與三邊形 Δabc 直接地相似。



第34圖

注意 如果ρ爲以$C=\overline{C}$爲中心，迴轉角爲θ的迴轉，又在ρ之下

$$\Delta ABC \xrightarrow{\rho} \Delta \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

則二直線$bACb$和$aBCa$ 之交角等於二直線 $b\overline{A}\overline{C}b$ 和$a\overline{B}\overline{C}a$ 之交角。即

$$\measuredangle(bACb, aBCa)$$
$$=\measuredangle(b\overline{A}\overline{C}b, a\overline{B}\overline{C}a)$$

成立。因此，從

$$bACbcABcaBCa=1$$

之假定可得

$$b\overline{A}\overline{C}bc\overline{A}\overline{B}ca\overline{B}\overline{C}a=1$$

之結果。其實，如在第 34 圖

$$\measuredangle(bACb, b\overline{A}\overline{C}b)$$
$$=\theta$$
$$=\measuredangle(AC, \overline{A}\overline{C})$$

且 $\measuredangle(aBCa, a\overline{B}\overline{C}a)$
$$=\theta$$
$$=\measuredangle(BC, \overline{B}\overline{C})$$

故可得

$$\measuredangle(bACb, aBCa)+\theta$$
$$=\phi$$
$$=\measuredangle(b\overline{A}\overline{C}b, a\overline{B}\overline{C}a)+\theta$$

即 $\measuredangle(bACb, aBCa)$
$$=\measuredangle(b\overline{A}\overline{C}b, a\overline{B}\overline{C}a)$$

成立。

如果我們應用此注意，則不妨假設C與a，b之交點重合，並且ΔABC之邊BC 落在Δabc之邊a上。對於如此特別情形，其後的證明變成比較簡單。

第三法 在此法中我們利用所給條件的

$$CabCAbcABcaB=1$$

之寫法。我們要先注意下列事情：設τ爲任一平移。又設在τ之下Δabc變成$\Delta\overline{a}\overline{b}\overline{c}$，即

$$\Delta abc \xrightarrow{\tau} \Delta\overline{a}\overline{b}\overline{c}$$

則

$$CabCAbcABcaB=1$$

成立時

$$C\overline{a}\overline{b}CA\overline{b}\overline{c}AB\overline{c}\overline{a}B=1$$

亦成立。其證明如下：條件

$$CabCAbcABcaB=1$$

亦可寫成

$$AbcABcaB=CbaC$$

之形狀。今設

$$b^A=AbA=b'$$
$$c^A=AcA=c'$$

則

$$AbcA=AbAAcA=b'c'$$

因爲一迴轉在點反射之下變成迴轉角相等的一迴轉，故直線b'，c'所成之角$\measuredangle(b', c')$等於直線b，c所成之角$\measuredangle(b, c)$，即

$$\measuredangle(b', c')=\measuredangle(b, c)$$

又b'，c' 之交點爲在點反射A之下b，c之交點的像點。此時，條件

$$AbcABcaB=CabC$$

之意思爲：二迴轉

$$b'c'=AbcA$$

及 $c''a''=BcaB$

之積等於迴轉

$$b'''a'''=CbaC$$

這些迴轉之中心分別爲b，c之交點在A下之像點，c，a之交點在B下之像點，a，b之交點在C下之像點。它們的迴轉角分別爲

$$\measuredangle(b, c), \quad \measuredangle(c, a)$$

及

$$\measuredangle(b, a)$$

現在先假設在Δabc中b，c之交點爲P，c，a之交點爲Q；a，b之交點爲R。又在$\Delta\overline{a}\overline{b}\overline{c}$中$\overline{b}$，$\overline{c}$之交點爲$\overline{P}$，$\overline{c}$，$\overline{a}$之交點爲$\overline{Q}$，$\overline{a}$，$\overline{b}$之交點爲$\overline{R}$。又設$P$，$\overline{P}$在點反射$A$之下的像點爲$P'$，$\overline{P}'$，$Q$，$\overline{Q}$在$B$之下的像點分別爲$Q'$，$\overline{Q}'$；$R$，$\overline{R}$在$C$下之像點分別爲

R'，$\bar{R}'$ 。我們想證明：迴轉

$$\bar{b}'\bar{c}' = A\bar{b}\bar{c}A$$

$$\bar{c}''\bar{a}'' = B\bar{c}\bar{a}B$$

及 $$\bar{a}'''\bar{b}''' = C\bar{a}\bar{b}C$$

之迴轉中心所成的三角形$\Delta\bar{P}'\bar{Q}'\bar{R}'$ 可從迴轉 $b'c'$，$c''a''$，$a'''b'''$ 之迴轉中心所成的三角形 $\Delta P'Q'R'$ 實行平移 τ^{-1} 而得。

如第 35 圖 $P\bar{P} \parallel \bar{P}'P'$ 且 $P\bar{P} = \bar{P}'P'$；

$Q\bar{Q} \parallel \bar{Q}'Q'$ 且 $Q\bar{Q} = \bar{Q}'Q'$；

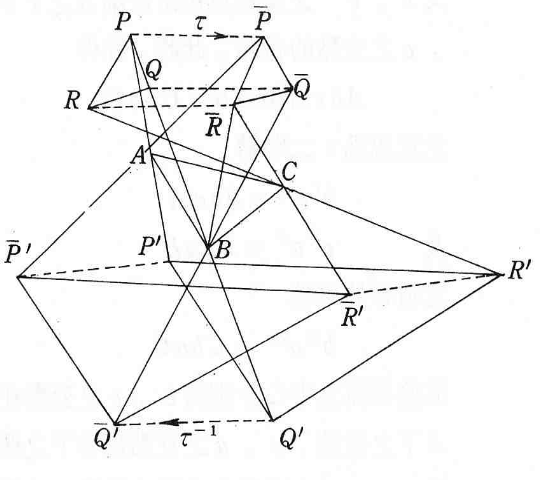
$R\bar{R} \parallel \bar{R}'R'$ 且 $R\bar{R} = \bar{R}'R'$；

故

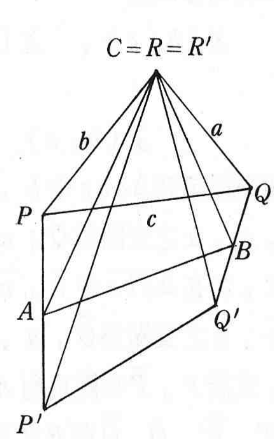
$$\Delta P'Q'R' \xrightarrow{\tau^{-1}} \Delta\bar{P}'\bar{Q}'\bar{R}'$$

如在上面所述

$$\measuredangle(b, c) = \measuredangle(b', c')$$



第35圖



第36圖

$$\measuredangle(\bar{b}, \bar{c}) = \measuredangle(\bar{b}', \bar{c}')$$

又由假定

$$\Delta abc \xrightarrow{\tau} \Delta\bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

$$\measuredangle(b, c) = \measuredangle(\bar{b}, \bar{c})$$

成立。故

$$\measuredangle(b', c') = \measuredangle(\bar{b}', \bar{c}')$$

等成立。因此，如果

$$\Delta abc \xrightarrow{\tau} \Delta\bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

則從

$$AbcABcaB = CabC$$

可得

$$A\bar{b}\bar{c}AB\bar{c}\bar{a}B = C\bar{b}\bar{a}C$$

依上面所設，從現在開始我們不妨假設：頂點C與a，b之交點重合。

如上，設P爲b，c之交點，Q爲c，a之交點，R爲a，b之交點。又設 $P^A = P'$（即點P在點反射A之下的像點爲P'），$Q^B = Q'$，$R^C = R'$。因爲條件

$$AbcABcaB = CbaC$$

表示

$$(b'c')(c''a'') = (b'''a''')$$

之意思，又

$$\measuredangle(b, c) = \measuredangle(b', c')$$

$$\measuredangle(c, a) = \measuredangle(c'', a'')$$

$$\measuredangle(b, a) = \measuredangle(b'''a''')$$

依二迴轉之積的作法得知：條件

$$AbcABcaB = CbaC$$

表示：$\Delta P'Q'R'$ 與 a，b，c 所成的三邊形Δabc（即ΔPQR）直接地相似。

現在來証明：

$$AbcABcaB = CbaC$$

成立時ΔABC與三邊形Δabc直接地相似於下：如在上面所論，不妨假設點C與a，b之交點R重合。先假設$\angle C \neq \measuredangle(a, b)$。

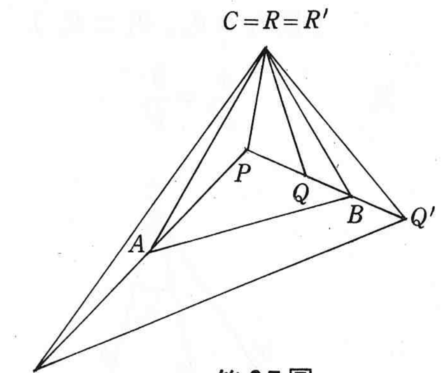
a）如果邊a，b均在$\measuredangle C$之外（第36圖），則直線$P'R'$及$Q'R'$均在$\measuredangle C$之內。故

$$\measuredangle P'R'Q' < \sphericalangle(b, a)$$

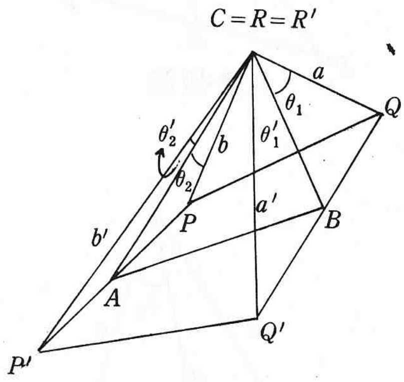
故$\Delta P'Q'R'$不能與Δabc直接地相似。即

$$AbcABcaB = CbaC$$

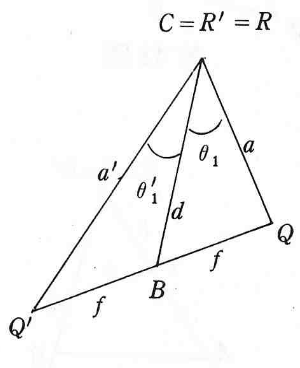
成立時此情形不能發生。



第37圖



第38圖



第39圖

b 如果邊a，b均在$\measuredangle C$之內（第37圖），則直線$P'R'$及$Q'R'$均在$\measuredangle C$之外。故

$$\measuredangle P'R'Q' > \sphericalangle(b, a)$$

故$\Delta P'Q'R'$不能與Δabc相似。即

$$AbaABcaB = CbaC$$

成立時，此情形不能發生。

c）考慮a，b中一邊在$\measuredangle C$之內，一邊在$\measuredangle C$之外的情形。例如，邊b在$\measuredangle C$之內，邊a在$\measuredangle C$之外的情形（第38圖）。此時假設CQ'，CB之線分長分別為a'，d。線分$Q'B$及BQ之長為f。直線BC與直線QC之交角為θ_1，直線$Q'C$與直線BC之交角為θ_1'（第39圖）。

我們想先證明下列成立：

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_1'} = \frac{a'}{a}$$

因在三角形ΔCBQ中

$$\frac{\sin\theta_1}{f} = \frac{\sin\measuredangle Q}{d}$$

同理在$\Delta CQ'B$中

$$\frac{\sin\theta_1'}{f} = \frac{\sin\measuredangle Q'}{d}$$

成立。由此二式可得

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_1'} = \frac{\sin\measuredangle Q}{\sin\measuredangle Q'}$$

另一方面，在$\Delta CQ'Q$中

$$\frac{\sin\measuredangle Q}{a'} = \frac{\sin\measuredangle Q'}{a}$$

成立。故可得

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_1'} = \frac{a'}{a}$$

如果直線AC與直線PC之交角為θ_2，直線$P'C$與直線AC之交角為θ_2'，線段$A'C$之長度為b'，則同理可得

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_2'} = \frac{b'}{b}$$

現在，來得$\measuredangle R' = \sphericalangle(a, b)$成立之條件。從第38圖得知：此式成立之條件係

$$\theta_1+\theta_1'=\theta_2+\theta_2'\equiv\theta$$

之成立。故

$$\theta_1-\theta_2=\theta_2'-\theta_1'$$

此時

$$\theta_1'=\theta-\theta_1,\quad \theta_2'=\theta-\theta_2$$

因此

$$\frac{a}{a'}-\frac{b}{b'}$$

$$=\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\sin\theta_1}-\frac{\sin(\theta-\theta_2)}{\sin\theta_2}$$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta_1-\cos\theta\sin\theta_1}{\sin\theta_1}$$

$$-\frac{\sin\theta\cos\theta_2-\cos\theta\sin\theta_2}{\sin\theta_2}$$

$$=(\sin\theta\cot\theta_1-\cos\theta)$$

$$-(\sin\theta\cot\theta_2-\cos\theta)$$

$$=\sin\theta\cot\theta_1-\sin\theta\cot\theta_2$$

$$=\sin\theta(\cot\theta_1-\cot\theta_2)$$

顯然 $\theta\neq 0$（因至少 $\theta_1\neq 0$ 或 $\theta_2\neq 0$ 成立之故），故 $\sin\theta\neq 0$。因此，

$$\frac{a}{a'}-\frac{b}{b'}=0$$

成立之充要條件係 $\theta_1=\theta_2$ 之成立。

如果

$$\measuredangle C\neq\measuredangle(a,b)$$

則 $\theta_1\neq\theta_2$。故

$$\frac{a}{a'}-\frac{b}{b'}\neq 0$$

因此，雖設

$$\measuredangle R'=\measuredangle(a,b)$$

能成立，$\Delta P'Q'R'$ 不能與 Δabc 相似。即

$$AbcABcaB=CbaC$$

成立時此情形不能發生。

其次假設

$$\measuredangle C=\measuredangle(a,b)$$

則 $\theta_1=\theta_2$ 成立。此時由

$$\theta_1-\theta_2=\theta_2'-\theta_1'$$

可得 $\theta_1'=\theta_2'$。故

$$\measuredangle R'=\measuredangle(a,b)$$

成立。並且，依上面所得的結果

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

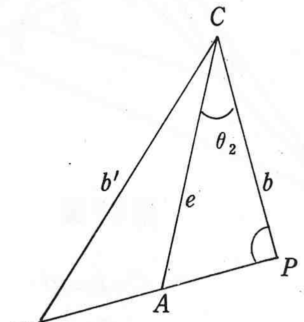
成立。因此，$\Delta P'Q'R'$ 與 Δabc 直接地相似。

此時二個三角形 $\Delta CP'P$ 及 $\Delta CQ'Q$ 爲直接地相似。此因在此二三角形中

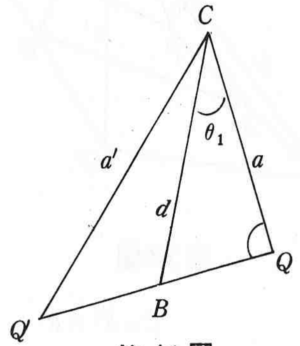
$$\measuredangle P'CP=\measuredangle Q'CQ$$

$$(\text{因}\,\theta_1=\theta_2,\ \theta_1'=\theta_2')$$

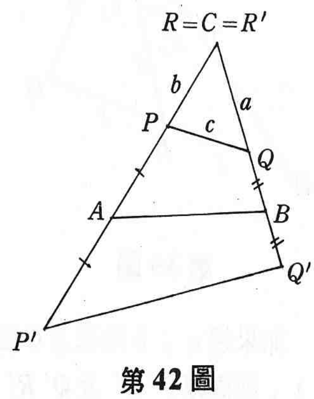
又
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$



第40圖



第41圖



第42圖

即 $$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

成立之故。此時ΔACP及ΔBCQ亦為直接地相似（第40圖及第41圖）。

設線段AC之長度為e，在此二三角形中$\theta_1=\theta_2$，且

$$\measuredangle CPA=\measuredangle CQB$$

（因$\Delta CP'P\backsim\Delta CQ'Q$之故）

因為此二三角形為相似，故得

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$$

即 $$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}$$

因為d，e為ΔABC之夾$\angle C$之二邊，故Δabc與ΔABC直接地相似。

以上我們假設了$\theta_1\neq 0$，$\theta_2\neq 0$。最後我們考慮$\theta_1=\theta_2=0$之情形。此時AC落在b上，BC落在a上（第42圖）。此時從所給的假設可知Δabc與$\Delta P'Q'R'$直接地相似。故$PQ\parallel P'Q'$。因為$PA=AP'$，$QB=BQ'$成立，可得$PQ\parallel AB$，即Δabc與ΔABC直接地相似。

§5 歐氏平面幾何的基礎建設

以上關於平面上的等長變換群之考察可提示下列事情：給了任何群，無論為有限或為無限，我們使用此群中對合的元素來構成"人為的"幾何。為此目的，先把群中的對合元素分成二類。一類為可表成二個對合的元素的乘積者，稱為"點"。另一類是不能表成三個對合的元素之乘積者。如此的對合稱為"直線"。然後使用在第二節所列舉的對合的元素間之（群的）關係定義點和直線間的種種幾何關係，而導出其外的種種幾何定理。因為我們有很多很多群，所以可得很多"人為的"幾何。這些"人為的"幾何都與原來的歐氏幾何相差很多。所以在歐氏幾何上成立的定理的大部分在其外的"人為的"幾何中都不能成立的。例如下列二命辭在任何"人為的"幾何中均成立的：

命辭1：

如果 $PQRS=1$ 且 $RSTV=1$，則$QPTV=1$成立。因由$PQRS=1$可得$RS=QP$。代入此式於第二式中可得$QPTV=1$。如果在"人為的"幾何中以條件$PQRS=1$來定義平行四邊形$PQRS$時，此命辭則主張下列事實：如果$PQRS$和$RSTV$均為平行四邊形，則$QPTV$亦為一平行四邊形。

命辭2 如果$(abc)^2=1$，$(abd)^2=1$且$(acd)^2=1$成立，則$(bcd)^2=1$亦成立。

証明 由$(abc)^2=1$和$(abd)^2=1$分別可得

$$ab=cbac$$

和 $$ab=dbad$$

故得 $$cbac=dbad$$

又由此式可得 $$cbacdabd=1$$

另一方面，由 $$(acd)^2=1$$

可得 $$acd=dca$$

把此式代入於上式可得

$$1=cb(dca)abd=cbdcbd$$

由此式又得 $$dbcdbc=1$$

故得 $$bcdbcd=1$$

即 $$(bcd)^2=1$$

但是在歐氏幾何上成立的定理的大多數在"人為的"幾何中是不成立的。例如，下列命辭3在歐氏幾何中成立，但是在很多"人為的"幾何中不成立：

命辭3 如果$(abc)^2=1$且$(abd)^2=1$成立，又$a\neq b$，則

$$(acd)^2=1$$

和 $$(bcd)^2=1$$

亦成立。

在歐氏幾何中$(abc)^2=1$成立與a, b, c爲共點或a, b, c爲互相平行相同(equivalent)。$(abd)^2=1$亦有相同的意義。如果a, b, c爲共點,a, b, d亦爲共點,故a, b, c, d四直線爲共點。又如果a, b, c爲平行,a, b, d亦爲平行,故a, b, c, d 亦爲平行。由這些事實馬上可得$(acd)^2=1$和$(bcd)^2=1$。

現在來列舉使命辭3不成立的一個"人爲的"幾何於下:

我們考慮A, B, C, D, E, F, G等七文字的所有置換(Permutations)所成的群。$ABC\cdots G$七文字中僅交換其中二特定文字而得的置換爲一對合的置換。例如,設a爲把A, B二文字交換而使其他文字不變的置換,則顯然 $a^2=1$ 成立。如此的置換可稱爲一直線。現在考慮此七文字中某特定二對文字,使其他三文字不變,並交換各對中之二文字。如此所得的置換亦爲一個對合的置換。例如置換P把文字A與文字B交換,把文字C與文字D交換而使E, F, G各文字不變,則顯然$P^2=1$ 成立。如果a爲在上面而所定義的對合的置換,置換b把文字C與文字D交換使其他各文字不變,則$P=ab=ba$成立。即P爲二個對合的置換a, b之積。故P可稱爲"點"。現在我們考慮上述的直線a, b之外並考慮如下的二直線c與d:即c爲把文字E與文字F交換使其他各文字不變的對合的置換;d爲把文字E與文字G交換而使其他各文字不變的對合的置換。則abc爲把$ABCDEFG$ 變爲$BADCFEG$ 的置換。故$(abc)^2=1$成立。又(abd)爲把$ABCDEFG$變爲$BADCGFE$之置換。故$(abd)^2=1$成立。(acd)爲把$ABCDEFG$變爲$BACDGEF$的置換,故$(acd)^2$爲把$ABCDEFG$變爲$ABCDFGE$的置換。故$(acd)^2\neq 1$。又(bcd)爲把$ABCDEFG$變爲$ABDCGEF$ 的置換,故$(bcd)^2$爲把$ABCDEFG$變爲 $ABCDFGE$的置換。故$(bcd)^2\neq 1$。

在上面已知:對於任一群我們可創造一"人爲的"幾何。而這樣的"人爲的"幾何都與歐氏幾何相差很多的。所以,如果我們以在歐氏平面上的等長變換群所成立的條件來限制我們所考慮的群,則漸漸增加如此條件,則可漸漸縮少可容許的群之範圍,而最後僅得歐氏平面上的等長變換群一群而已。就是說:這些所添加的條件可完全把歐氏平面上的等長變換群特徵化(Characterize),因而把平面歐氏幾何特徵化。故可得歐氏平面幾何基礎的公理系。Hjelmslev 最初使用點反射和直線反射間的關係來做爲絕對幾何(即歐氏幾何和二種非歐幾何的共同部分而不考慮與平行性公理有關的事情)的基礎。Thomsen, Bachmann等人繼承了這種想法。從此觀點,現在對於歐氏幾何和二種非歐幾何各有完整的公理系了。但是在這裡我們爲了簡單計,僅限制於歐氏平面幾何的情形。我們想列舉在Bachmann的書中所採用的公理系。

設G爲所考慮的群。設S爲G中(即$S\subset G$)所有對合的元素的集合。S中的直線以a, b, c……表示,及S中的點以A, B, $C\cdots$表之。現在,先說明在公理的陳述中所用的記號:對於S中任二元素ρ, σ,如果$\rho\sigma$亦在S中,則以$\rho|\sigma$之符號表之。故$\rho|\sigma$表示$\rho\neq\sigma$且$\rho\sigma=\sigma\rho$成立。又$\rho_1,\cdots,\rho_m|\sigma_1,\cdots,\sigma_n$表示$\rho_i|\sigma_k$之關係對於所有$i=1,\cdots,m$和$k=1,\cdots,n$成立。

我們先列舉對於平面絕對幾何所用的公理:我們先要求下列基本假設:

基本假設 有一個從群G中的所有對合的元素所成的(G的)不變的生成系S存在。

此地所謂"不變的"有下述意義:即群之一子集合S爲"不變的"的意思爲S之任何元素被G之任何元素所變換而得的元素亦屬於S。

公理1　對於點A，B有一直線c存在使$A,B\mid c$成立。

公理2　如果$A,B\mid c$，d成立，則或$A=B$成立，抑或$c=d$成立。

公理3　如果$a,b,c\mid E$成立，則有一直線d存在使$abc=d$成立。

公理4　如果$a,b,c\mid e$成立，則有一直線d存在，使$abc=d$成立。

對於滿足這些公理和基本假設的群G及其不變生成系S所成的對（G，S）我們可考慮對應的計量平面如下：此計量平面由直線a，b，c，…及點A，B，C，…等所成。如果二直線a，b滿足$a\mid b$之關係，則稱a與b垂直，以$a\perp b$記之。對於一點A和一直線b如果有$A\mid b$之關係成立，則稱A與b有incidence的關係，即有A在a上，或a經過點A之關係。以AIb（或bIA）表之。現在上列公理所表的幾何意義如下：

公理1說：對於相異二點，必有一經過這二點的直線c存在。

公理2說：對於相異二點至多只有一個經過這二點的直線存在。

如果三直線a，b，c滿足$abc\in S$，則稱a，b，c屬於一線束。此時有一個直線d存在，使$abc=d$成立。稱d爲關於a，b，c之第四反射直線。此時得知：

公理3說：如果三直線a，b，c共有點E，則a，b，c屬於一線束。

公理4說：如果a，b，c與同一直線e垂直，則a，b，c屬於一線束。

這些公理1－4及基本假設是爲了絕對幾何之基礎而設立者，故爲歐氏幾何和二種非歐幾何所共有的。使用這些公理和基本假設，我們可證明上面§2，§3所論的結果可能經過極小變更之後在絕對幾何成立的。爲了其詳細的討論請看Bachmann的書。

除了這些共同的公理之外，對於歐氏幾何，及二種非歐幾何之建設還分別需要設立幾個不同的公理。例如，對於歐氏幾何仍須設立下列公理：

公理R　有四直線a，b，c，d存在使a，$b\perp c$，d和$a\neq b$，$c\neq d$成立。

公理V*　對於二直線a，b有一點C存在，使a，$b\,I\,C$成立，或有一直線c存在使$a,b\perp c$成立。

注意：如果對於公理系1－4，我們加上公理V*，則在基本假設中我們不需要假設生成系S的“不變性”。

在上述基本假設和公理1－公理4之下，可證明下列公理與公理R同値：

公理R*　如果a，$b\perp c$且$a\perp d$成立，則$b\perp d$成立。

因此，對於歐氏平面幾何之基礎建設我們採用：基本建設，公理1，公理2，公理3，公理4，公理R*和公理V*。

如果給了二直線a，b，則依公理V*，他們共有一點或與一直線垂直，故依公理3和公理4 $abc=b^a$爲一直線。

如果二直線持有一公共垂線，則稱此二直線爲**平行**以$a\parallel b$表之。故平行性滿足反射、對稱、遞移等性質。經過一點對於一直線有一個且僅一個垂直線存在，故經過一點有一個且僅一個與所給的直線平行的直線存在。

依公理V*，對於二直線或有一點C存在使a，$b\,I\,C$成立，抑或有一直線c存在使a，$b\perp c$成立。故$a\parallel b$與“a與b不相交”有相同的意義。

用這些公理最後可證明Pappus-Pascal的定理，又可求出等長變換群之表現式，而完全把歐氏平面幾何的等長變換群特徵化（Characterize）。對於其詳細討論請看Bachmann的書。　（本文作者為本所研究員）