談教與學的態度

由命題、解題

王淑霞

一、前 言

由於這次聯考的抄題（所謂的！其實我不同意），引發了筆者正視一個我們常面對的問題，那就是作爲一個教師，必須常常命題給學生考試，命題時的心態與困惑。

誠如石厚高先生在數播季刊 27 期的聯考專欄中所講的，命題是一種藝術，也是技術，是專業知識，是命題技術與專業知識的配合，故一個命題者由接到命題通知到完成一份命題甚至到考生拿到題目動手解題，這一連串過程中的心態實在是一個值得拿來討論研究的話題與問題。

二、命題者的心態與解題者的一種解題態度

構思一份題目，眞如作一篇文章，又像蓋一座房子，文章要作得得體，房子要蓋得好，骨架與內容都要配合。通常都是先考慮這份題目的宗旨。

(1)如果這份考題的目的是要看學生該懂的基本東西是否懂了，該作的課本作業是否認眞作了，學校裡的平時考、月考常是屬於這種性質，因此出題常以課本習題、例題或上課筆記爲依據，或者照抄，或者略改數字。這種題目若要使一班的⅔及格，只要題目不要變化太大，學生按步就班的作習題是很容易及格的。

(2)如果考試的性質是要測驗學生的數學資賦，如數學競試，那麼這份題目就不能完全出

自抄襲了，如何構思一份有創意的題目，這就值得研究了。筆者認爲要培養創作巧思題目的能力，首先得培養“欣賞題目”的態度與習慣，這要著重在平時的功夫。平時，解完一道題目之後，應回頭再看一遍，並思考其解法的特色在那裡，這個題目主要測驗我們那些知識，這道題目設計的匠心、妙處何在，由這個題目可以引伸出什麼？這個題目是只止於練習？還是另外給我們知識？或者暗示著一種方法？總之，解完一道題目之後，還應再以方法論與知識論的觀點去審視、鑑賞一番，如此功夫作多了，自然也能模倣、創作漂亮有深度的題目。（註：有感於此，所以對於數學圈第十期，朱建正先生把文復會舉辦的高中數學競試題目的命題狀況、過程及心態都一一剖析，使我們除了了解題目的解法之外，更給我們模倣且嘗試獨立設計題目的學習機會，眞是感謝）

去年，學校派我出高一的數學競試題目，我想何不嘗試看看，由解題中去欣賞、分析進而設計題目，因此，隨手抓了一本高一參考書，看到了如下的數學歸納法的題目：

例1 設 $\alpha=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$

$$\beta=\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$$

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{13}}(\alpha^n-\beta^n)$$

試證 $f(n)\in N$，$\forall n\in N$。

解完這題，回顧分析，心裡很納悶，出題者如何得知取

$$\alpha=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$$

$$\beta=\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$$

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{13}}(\alpha^n-\beta^n)$$

這樣可得 $f(n)\in N$；再翻了數頁，又看到如下的題目：

例2 $\forall n\in N$，設 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

$$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}，f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$$

試證 $f(n)\in N$

更覺其中必有文章，又看到了：

例3 $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 恆能被 2^n 整除。

把例3改寫一下：

$$\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2}，\quad \beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}，$$

$$f(n)=\alpha^n+\beta^n$$

試證 $f(n)\in N$

心想，把三題中的 α，β 的選取道理了解之後，就可自行設計，要幾題都沒問題了。於是，把三題的解法過程詳細比較一番，發現在歸納法的步驟中，

例1得：

$$f(k+1)$$
$$=(\alpha+\beta)f(k)-\alpha\beta f(k-1)$$
$$\Rightarrow f(k+1)=3f(k)+f(k-1)$$

例2得：

$$f(k+1)$$
$$=(\alpha+\beta)f(k)-\alpha\beta f(k-1)$$
$$\Rightarrow f(k+1)=f(k)+f(k-1)$$

例3得：

$$f(k+1)$$
$$=(\alpha+\beta)f(k)-\alpha\beta f(k-1)$$
$$\Rightarrow f(k+1)=6f(k)-4f(k-1)$$

發現例2就是我們熟悉的費氏數例，例1例3只是把 $f(k+1)$，$f(k)$，$f(k-1)$ 三項的遞迴關係式略事修改而已。而 α，β 的選擇正與遞迴關係式的係數有關，因此例如令

$$f(k+1)=4f(k)+3f(k-1)$$

則 $\alpha+\beta=4$，$\alpha\cdot\beta=-3$（或3也可以）

所以，α，β 爲 $t^2-4t-3=0$ 的二根，

$$t=2\pm\sqrt{7}$$

$$\alpha = 2 + \sqrt{7}$$

$$\beta = 2 - \sqrt{7}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{7}}(\alpha^n - \beta^n)$$

則 $f(n) \in N$。只要取

$$f(k+1) = af(k) + bf(k-1)$$

$$a, b \in N$$

所得的 α，β 及 $f(n)$，則 $f(n) \in N$。

於是，下類型的數學歸納法原理「$S \subset N$，若 S 滿足 (i) 1，$2 \in S$；(ii) 假設 k，$k+1 \in S$，則 $k+2 \in S$。則 $S=N$」的應用問題，可就要多少題有多少題了。

另外，對此題有了了解之後，題目要如何設計，可就戲法隨人變了。例如，以考察學生觀察歸納的能力，則可依上述的觀察了解而設計題目。又如，以遞迴定義數列的觀點，上三例題表示的是：

$$f_1(n) = c(\alpha^n + \beta^n)$$

或 $$f_2(n) = c(\alpha^n - \beta^n)$$

則 $$f_i(n+1)$$

$$= (\alpha+\beta) f_i(n) + \alpha \cdot \beta f_i(n-1)$$

$$(i = 1, 2)$$

心想：除了 f_1 及 f_2 以外還有沒有其他的數列也滿足 $f(n+1) = xf(n) + yf(n-1)$ 的遞迴關係式？於是問題變成要找此遞迴定義的數列通解。先觀察 $f_1(n)$，$f_2(n)$，發現 $f_1(n)$，$f_2(n)$ 均為 α^n，β^n 的線性組合，不過線性組合的係數很特殊，何不試試更一般些的，例如

$$f(n) = a\alpha^n + b\beta^n$$

則

$$\begin{aligned} f(n+1) &= a\alpha^{n+1} + b\alpha\beta^n + a\alpha^n\beta \\ &\quad + b\beta^{n+1} - b\alpha\beta^n - a\alpha^n\beta \\ &= \alpha(a\alpha^n + b\beta^n) \\ &\quad + \beta(a\alpha^n + b\beta^n) \\ &\quad - \alpha\beta(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}) \\ &= (\alpha+\beta)(a\alpha^n + b\beta^n) \\ &\quad - \alpha\beta(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n+1}) \\ &= (\alpha+\beta) f(n) \\ &\quad - \alpha\beta f(n-1) \end{aligned}$$

哇！太好了，$f(n) = a\alpha^n + b\beta^n$ 仍舊有這種遞迴關係式（事實上，不必算就該看出來的！）那麼到底滿足這種遞迴關係的數列除了 $f(n) = a\alpha^n + b\beta^n$ 以外還有沒有？又為得 a，b 題目必須給二個已知項。基於以上了解，如以考察學生對於遞迴定義的數列求一般項能力的觀點，我們可設計如下的題目：

設 $f(n+1) = 2f(n) + f(n-1)$，

$f(1) = 2$，　$f(2) = 5$

求 $f(n) = ?$

(i) 試以同型漸化法（或任何你所知道的方法）求 $f(n)$。

(ii) 再以設 $\alpha + \beta = 2$，$\alpha \cdot \beta = -1$，再令 $f(n) = a\alpha^n + b\beta^n$ 解 a，b。

(iii) 比較 (i) 與 (ii) 的結果是否相同。

最近，本校週考出了如下的題目：

「$S \subset Z$，且 S 滿足 (i) $1 \in S$

(ii) 若 $k \in S$ 則 $k-1$，$k+1 \in S$」

則 (A) $S \supset Z$ (B) $S \supset N$ (C) $100 \in S$

(D) $S = N$ (E) 以上皆非。

看到這個題目，真是拍手叫好，這個題目的設計真是把數學歸納法的精神發揮得淋漓盡致，設計者真是頗具匠心啊！不只考了歸納法的表面，而且深入歸納法的內涵去，當然，在欣賞之餘，又可模倣它，自行變化設計了。

(3) 兩種性質的混合：例如聯考就屬於這種性質，一般人對於聯考題目的要求，就是屬於這種心態，又要考題有鑑別力，能鑑別數學能力，但又要讓讀好書的人能考好試，這樣才能引發學生唸數學的興緻，所以對聯考題目就百般挑剔了。如果一份聯考題屬於第一種性質的成分較多，那麼平均分數就會提高，如果屬於第二種性質的成分較多，那麼平均分數就慘兮兮了，而為衆人攻擊，因而影響教師的教學興緻，學生也學得懶洋洋的，於是聯考引導教學的論調大唱，但唱歸唱，聯考的命題戲法年年得變，作為數學教師與學生，要如何教與如何學才能以不變應萬變，可真是一個值得探討的

問題(這是後話,“三”中我們要提出一種態度。)

宗旨旣定,着手命題,有時是心有主見想要測驗學生那些應該知道的知識理論,再來設計題目,有時是因欣賞某個題目,而引發他去設計測驗某類性質的題目,雖然開始時並不心存要測驗這類性質。但是無論如何,每個題目都有它的中心目的,題目當然不是白出的。所以解題時,有時是仔細審題後,馬上就直覺反應知道如何下手,一邊作一邊有這種共鳴:哇!出題先生就是要考我這個知識!還好這方面的知識我很清楚,要不然就作不下去了;有時審題之後,茫無頭緒,這時不妨略作猜測:出題的用意何在?是屬於那一類的問題?對於那一類的問題,我懂那些基本方法、觀念、理論……如此下去,有時常會引導我們得到解題的靈感。

例如 $f(x)=100\cdot x^{99}+99x^{98}+98x^{97}+\cdots+2x+1$ 求 $f(6)=?$

分析:求 $f(6)$ 可依兩種觀點:一爲函數求函數值,一爲餘式定理求 $f(x)$ 除以 $x-6$ 的餘式,發現用第二種觀點綜合除法並不討好,用第一種觀點直接以 $x=6$ 代入,也不好算,但別無他法,也只好試試看,

$f(6)=100\cdot 6^{99}+99\cdot 6^{98}+\cdots+2\cdot 6+1$

發現這是一個有限級數,回想有限級數求和的方法,我知道的有……如此一路想下去,必定會和曾做過的有限級數和:$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+100\cdot 3^{99}$ 聯想在一起,如此 $f(6)$ 也可解出來了,解完之後心裡也會有:本題的設計就是在測驗函數值與級數和的兩種知識,這種感受。

三、提出一種教學:以知識論與方法論的觀點去教每一堂課的內容

基於以上對命題心態與解題態度的了解,第一種性質的考題考數學基本知識的了解成分較多,第二種性質的考題考數學思考方法的成分較多,因此,在此,我願提出一個可以儘量(當然,我不敢說完全)兼顧聯考與教學的教學態度,那就是以「方法論與知識論的觀點去上每一個單元,去講解每一個例題習題,藉上教科書的機會,培養學生的數學知識與思考方法」。這個說法很空洞,有點兒唱高調的味道,讓我們來看一個實例,以教授高中數學實驗本第二册數列與級數,等差數列與等比數列的有關知識爲例。

先以知識論的觀點講述等差、等比數列的有關知識

(1)何謂等差數列?

(2)等差數列的一般項 $a_n=?$

(3)等差數列的首 n 項和 $S_n=?$

(4)何謂等比數列?

(5)等比數列的一般項 $a_n=?$

(6)等比數列的首 n 項和 $S_n=?$

一一詳述並證明後,再回頭以方法論的觀點思考一下每一個內容,除了得到 a_n 及 S_n 的公式之外,對我們的概念及方法上還有什麼啓示(啓發)?

例如:由(1)及(4),回顧其定義;所謂等差數列,就是一個數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n-a_{n-1}=d$(d 常數),所謂等比數列 $\langle a_n\rangle$,$a_n\neq 0$ 就是 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=r$(r 常數)。發現上二定義,告訴我們另一種定義數列的方式,根據我們對數列的了解,數列就是一個 $N\to R$ 的函數,所以給數列就給一般項 $f(n)=a_n$,這裡是給首項 a_1,以及相鄰兩項 a_n 與 a_{n+1} 的關係,如此由 a_1 傳到 a_2,a_2 傳到

a_3，…像接力賽一樣，這樣每項都知道了，啊！這就是所謂的遞迴定義法，難怪參考書裡擺了那麼多遞迴定義的題目。而由等差等比數列一般項 a_n 的公式來源，必可給我們一般遞迴定義的數列求 a_n 的方法。於是，再去觀察(2)、(5)兩問題的內容：(2)中採取了：

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=d \\ & a_3-a_2=d \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ +) & a_n-a_{n-1}=d \\ \hline & a_n-a_1=(n-1)d \end{array}$$

(5)中採取了

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1\cdot r \\ & a_3=a_2\cdot r \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \times) & a_n=a_{n-1}\cdot r \\ \hline & a_n=a_1\cdot r^{n-1} \end{array}$$

發現上兩法的共通特性是把遞迴關係式的 n 以 2，3，… n 代入，直式排出，(2)中採取累加，(5)中採取累乘，達到把 $a_2\cdots\cdots a_{n-1}$ 均消去，只留下 a_n 及其他已知數，不妨給個名字，一個叫累加法，一個叫累乘法。

歸納一下：處理遞迴定義數列求 a_n，我們學到了兩招，累加法及累乘法，以後碰到這類問題，不怕無從下手，至少我們可以試試這兩招，而累加、累乘其用意均是達到對消的目的，當然，這兩招並不一定到處有效，但也不要氣餒，因爲碰到這兩招失效的問題時，又是我們學習新招的時候了，只要我們在解題之餘，能再以方法論的觀點去思考、分析、抽取。

接下來，講解例題時，除了作等差、等比公式的應用例題外，還可給個累加、累乘的應用例題，另外再給個課外習題。

習題1 請同學回家自行設計一個以遞迴定義的×××數列，並求一般項及首 n 項和。若覺自行設計有困難，請同學翻閱參考書，去找這種類型的問題。（如此，可訓練學生選擇題目的能力）

習題2 把等差的定義變形一下，不妨稱爲“擬等差數列”$\langle a_n\rangle$，$a_1=a$，$a_n-a_{n-1}=f(n)$（$\forall n\geqslant 2$），其中 $f(n)$ 爲 n 的一次式，求 a_n。若 f_n 爲二次式，則 a_n 又如何？若 $f(n)$ 爲三次式，則 $a_n=$？，作完以後，試著觀察歸納。

習題3 模做習題 2，再把等差數列的遞迴定義作個變形，再求 a_n，S_n，並看看：有沒有什麼新方法？

習題4 翻閱參考書，找累加累乘有效的題目，另外找累加、累乘法失效的題目，並由該題學習新方法。

另外，由(3)、(6)也可學到處理有限級數求和的方法，（除了學到公式以外），由它的形式特色，把此方法命名爲：移位消去法。

歸納之，得處理有限級數和的辦法，一爲：直接使用A.P. G.P. 和公式，一爲移位消去法。

例：求 $S=0.9+0.99+\cdots+0.\overbrace{9\cdots9}^{n\text{個}}=?$

解一：以直接使用等比和公式觀點，則作如下處理：

$$\begin{aligned} S &= (1-0.1)+(1-0.01) \\ &\quad +\cdots+(1-0.\overbrace{0\cdots\cdots01}^{n-1\text{個}}) \\ &= n-\left[\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\cdots\right. \\ &\quad \left.+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right] \end{aligned}$$

式中 $\frac{1}{10}+\cdots+\left(\frac{1}{10}\right)^n$ 爲等比級數。

解二：以移位消去法觀點

$$\begin{array}{rl} & S=0.9+0.99+\cdots+0.\overbrace{9\cdots9}^{n\text{個}} \\ -)\ 0.1S= & \quad 0.09+\cdots+0.09\cdots9+0.\overbrace{09\cdots9}^{n\text{個}} \\ \hline \end{array}$$

$$0.9S = 0.9 + 0.9 + \cdots + 0.9 - 0.0\overbrace{9\cdots 9}^{n\text{個}}$$

$$= 0.9 \cdot n - 0.0\overbrace{9\cdots 9}^{n\text{個}}$$

回顧解一，本題的設計只是在讓我們練習使用等比級數和的公式而已，基於此認識，我們也可將其變化一下，自行設計如：

$$S = (1 - 0.1) + (1 - 0.001) + (1 - 0.00001) + \cdots + (1 - 0.\overbrace{0\cdots\cdots 0}^{2n-2\text{個}}1)$$

得 $S = 0.9 + 0.999 + 0.99999 + \cdots + 0.\overbrace{9\cdots\cdots 9}^{2n-1}$ 的題目

甚至再變化，取

$$S = (1 - 0.1) + (0.1 - 0.001) + (0.01 - 0.00001) + \cdots \text{至 } n \text{ 項}$$
$$= 0.9 + 0.099 + 0.00999 + \cdots + \text{至 } n \text{ 項}$$

的題目。甚至再變化，取

$$S = \sum_{k=1}^{n} (a_1 r_1^k - a_2 r_2^k)$$

選取 a_1，a_2，r_1，r_2，則各式各樣好玩的題目都出籠了。

解完一個例題，再回頭以知識論與方法論的觀點去回顧，有的題目是當作練習做過就算了，有的題目卻是在告訴我們一些基本知識，則我們應藉解題之餘回顧之中吸取到該性質；也許此題在提供我們一種方法，這方法也許是我們已知的，只是藉作此題再熟練一番，這方法也許是我們不知道的，於是藉作此題的機會，吸收到這個新方法、新觀點；也許，這個習題只是一個開端、一個靈感引導我們再深入去思考，這個問題的背後有什麼值得探討的問題，至於眞正的答案是什麼，可沒有定論，端乎個人的思考，教師只是藉着課堂上的機會培養學生唸完書，解完題後去思考去歸納（並且具體示範）的習慣而已。當然，課堂上作回顧、分析、思考的深度如何，要視學生程度而取捨，端乎教師的巧妙運用。而且，這樣的課上下來，不再是老師唱獨腳戲，在回顧之中，學生常有許多意料不到的想法、問題刺激教師再重作思考，於是老師得教學相長，學生也有主動參與的樂趣，學習理論不再完全是被動，書上寫什麼，我就唸什麼、教什麼，還能主動去提昇理論的了解層次，而且解題也不再是被動地別人出題我解，學生還能主動設計題目反考別人（當然也等於考自己），這是作學生最得意不過的事了，教師也不覺年年教同樣的東西而覺枯燥乏味，教師出題也不再止於抄襲，改改數字了。

常言道：學而不思則罔，思而不學則殆；以上所提的教學態度，間接地，具體地提供教師如何模倣，創造新題目的方法，並且也具體地、細微末節地詳述如何藉着課堂上的每一個單元的教學流程中，如何培養學生的思考習慣，使他養成學而思，思而不得再學再思的習慣，而且常常在如此學思反覆的教學之中，領悟到許多數學題外的道理，對學生（甚至教師自己）往後的爲人處事均甚有助益，我常把這些所得叫做「數學課裏的人生哲學」，讓學生在枯燥的數學符號之間，仍能享受到一些樂趣與收獲。畢竟，數學家處理一個符號、定義、定理常常是因其具有某種學養、胸襟而有如此的處理，而這些內涵通常是隱藏在定義定理的背後，並不會明白寫在書上，但藉着這種態度的教學，我們常可體會、領受到，例如：從講述一個定義中，常可體會到數學家處理一個新名詞所持的一種求眞與簡單樸實的美及定義的務實性（不可或缺性），於是藉着這個定義的講解中，讓學生除了懂得定義以外，還領受到數學家求眞、求美、務實的態度。（註：如果有機會聽取數學名家的演講，常常不只是聽其內容，並且領受其治學處事態度的學養的薰陶就是這個道理。）

附帶地，由於一般學生沒有看數學課本的習慣，而且獨立閱讀並接受分析一新的數學名詞定義的能力也很差，因此，我們也應藉著上

課的機會，讓學生拿出課本，閱讀課本該段定義，並學習分析定義中每個條件的意義，並學習如何自我熟練該定義以及由舉例熟練之中，體會出許多的性質、定理是如何由定義出發走出來的。如此長期訓練下來，應付聯考題目中像閱讀測驗式的題目能力就很強，畢竟，看到題目中出現的新名詞，他的反應不是：這個老師沒教過，於是心先恐懼，他已習慣接受新定義，新名詞，並知道反覆推敲，並嘗試自我熟練，於是答對這個題目的機會就大多了。而這個習慣，對其他科目的學習助益更大，如此則不枉「數學為科學之母」。

提出這樣的教學態度，只是希望我們的教學更接近高中數學教育目標（除了考好聯考之外），尤其對於將來直接應用數學知識的機會很少的乙組學生來說，希望數學課除了帶給他們挫折之外，還能讓他們吸收到數學教育想給他們的東西。

四、學生應有的學習態度

教師盡力培養學生的數學學養，學生也得努力配合，除了基本的理論了解以外，尤其在課外練習時，也能秉持着方法論與知識論的觀點去面對每一個習題，這其中首要：審題的功夫，仔細閱讀題目的習慣的養成；其次，解題後回顧的功夫，這個題目是當作練習作完就拜拜？還是另外告訴我們什麼？一種方法？觀點？檢討自己是不是因為缺少這種方法、觀點的認識而無從下手？題目設計是要測驗什麼原理？這個原理我懂嗎？是否是因為不懂此原理使我作不出來？找出自己能解出此問題的癥結所在，當然也挑出自己不能解出問題的癥結，去作補救；有興緻的話，再自行模倣設計一個類似題，自我測驗一番。

這種解題之餘的功夫，是一般學生所欠缺的，若能確切去做，則解題能力將增強許多，以一當十，事半功倍，何樂不為？

五、結　語

筆者除了教學生以此二觀點學習，並也時常自勉。相信各位數學先進，對於出題技巧、教學方法、解題態度、學習方法必有更深入獨到的見解，提出此文，只是做個發端，希望大家來談這個問題，並且提出個人的見解，讓我們在琢磨中更進步，使聯考的題目也好，學校裡的命題也好，更合理無瑕，讓我們數學界除了老在日本入學試題精解，加拿大數學競試集……中打轉外，也能有一份中國自己的數學試題專集。讓資賦優異者更富創造力，讓資質平庸者雖不能作一個數學創作者，至少也能作一個欣賞者，而不是只作一個數學逃兵。

—本文作者現任教於新竹女中—