對於林文東「一元n次方程式根的同次冪之和的求法」的幾點感想

康明昌

(一)

問題：令方程式$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$的$n$個根爲$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$。設$S_1=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，$S_2=\alpha_1^2+\cdots+d_n^2$，…，$S_k=\alpha_1^k+\cdots+\alpha_n^k$。求$S_k$，$k=1,2,\cdots\cdots$。

以上問題是一個很基本的高中代數（尤其是「對稱式」）的問題。通常的解決辦法，就是習稱的Newton formula的證明。很難能可貴的，我們在林文東先生的文章「一元n次方程式根的同次冪之和的求法」（「數學傳播季刊」第七卷，第四期，頁53～60，七十二年十二月）看到另一個方法。林文東先生用很巧妙的方法求出S_k的完整形式（用p_1，p_2，…p_n表示）。

林文東先生的發現，證明高中數學教師中具有研究求知熱誠的人還是不少。不過，我想指出的是，林文東先生的方法其實是一個數學上常用的手法，那就是「生成函數」（generating function）。並且我相信Leonhard Euler（1707～1783）用過同樣的方法解決同樣的問題。（見本文第(三)部分）

我暫且不說明什麼是生成函數。以下我先說明爲什麼林文東先生的方法就是生成函數的方法。

符號$f(x)$，p_1，…p_n，$\alpha_1\cdots d_n$，S_1，S_2，…，S_k，…，如前。

$$S_1+S_2t+S_3t^2+\cdots+S_kt^{k-1}+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^r t^{r-1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_i^r t^{r-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i t}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\alpha_i(1-\alpha_j t)}{(1-\alpha_1 t)(1-\alpha_2 t)\cdots(1-\alpha_n t)}$$

令$g(x)$是$f(x)=0$經過倒根變換而得（即$g(x)=0$之根都是$f(x)=0$之根的倒數），且$g(0)=1$。很容易求得，若$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n$，則$g(x)=1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n$。另一方面又知，$g(x)=(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots(1-\alpha_nx)$，且$g'(x)=-\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\alpha_i(1-\alpha_j x)$

令 $h(x)=g(x)-1$

$$= p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

故得

$$-\sum_{r=1}^{\infty} S_r t^{r-1} = \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{d\ln g(t)}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\{h(t) - \frac{1}{2}h(t)^2 + \frac{1}{3}h(t)^3 - \cdots\cdots\}$$

$$= \frac{d}{dt}\{(p_1 t + \cdots + p_n t^n) - \frac{1}{2}(p_1 t + \cdots + p_n t^n)^2 + \frac{1}{3}(p_1 t + \cdots + p_n t^n)^3 - \cdots\}$$

若想求 S_k，只需求出式子最右邊 t^{k-1} 的係數。因此，只需求出 $(p_1 t + \cdots + p_n t^n) - \frac{1}{2}(p_1 t + \cdots + p_n t^n)^2 + \frac{1}{3}(p_1 t + \cdots + p_n t^n)^3 - \cdots + (-1)^{k-1}(p_1 t + \cdots + p_n t^n)^k$ 之中 t^k 之係數（再除以 k！）。利用二項式定理，這個係數不難求出，那就是林文東先生文章的結論給出的形式。

如果 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是給定的數值，在特殊情形下，利用Cauchy 積分公式計算 S_k 可能也很簡便。即 $S_k = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma \frac{g'(t)}{t^k g(t)} dt$，其中 γ 是足夠靠近原點，並且圍繞原點的簡單封閉曲線（simple closed curve）。

(二)

一般的說，給定一組數列 $\{a_k : k = 0, 1, 2, 3, \cdots\}$，考慮以下的無窮級數（或形式冪級數，formal power series），

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k + \cdots$$

則 $F(t)$ 叫做數列 $\{a_k : k = 0, 1, 2, \cdots\}$ 的生成函數。

當然，也不妨考慮 $G(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_k t^{k-1} + \cdots$，或 $H(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2!} t + \frac{a_3}{3!} t^3 + \cdots + \frac{a_k}{k!} t^k + \cdots$。運用之妙，存乎一心。

生成函數的各種解析性質，如函數關係（functional equations），零點，留數（residue），經常反映數列 $\{a_k : k = 0, 1, \cdots\}$ 的各種性質。

生成函數是一種非常常見的數學手法。在或然率，差分方程（difference equations），組合分析（combinatorics），初等整數論（elementary number theory），我們常用生成函數去解決問題。事實上，生成函數的精神在Weierstrass $\wp$ 函數（複變函數論），Poincaré 級數（不變量理論），Hilbert 函數（代數幾何），以另一種形式出現。

敏感的讀者可能會提出一個問題，如果給我們的不是一組數列，而是一個函數 $\{a_t : t \in \boldsymbol{R}\}$，那麼生成函數是什麼？學過 Laplace transforms 或 Fourier transforms 的人，自己應該可以找出想要的答案。我不要把主題扯得太遠。

最早提出生成函數的概念的人是Abraham de Moivre（1667～1754）。de Moivre 是一個法國人，他信奉新教。南特詔書（The Edict of Nante, 保障宗教信仰自由）取消之後，他移居英國，逃避法國天主教徒的宗教迫害。高中學生對於 de Moivre 的瞭解大概是 de Moivre 定理：$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta$。其實 de Moivre 是 Isaac Newton（1642～1727）當時在英國找得到的少數幾個談得來的數學家。de Moivre 的傳世著作是，The Doctrine of Chances，一本或然率的著作。

(三)

Euler 曾經異想天開，想利用第(一)部分的

方法，求出$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$的和。他的方法如下。

假設第(一)部分的方法對於具有無窮多個根的函數也成立。令α_1，α_2，……，α_n，…是$f(x)=0$的所有根，且$S_k=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^k$。則

$$\sum_{r=1}^{\infty}S_r t^{r-1}=\frac{-g'(t)}{g(t)}$$

其中$g(x)=0$的所有根是$\frac{1}{\alpha_1}$，$\frac{1}{\alpha_2}$，…$\frac{1}{\alpha_n}$，……，且$g(0)=1$。

令$\alpha_1=\frac{1}{\pi}$，$\alpha_2=-\frac{1}{\pi}$，$\alpha_3=\frac{1}{2\pi}$，$\alpha_4=-\frac{1}{2\pi}$，$\alpha_5=\frac{1}{3\pi}$，$\alpha_6=-\frac{1}{3\pi}$，……。很容易檢查，令$g(x)=\frac{\sin x}{x}$，則$g(x)=0$的所有根是$\pm n\pi$，$n=1$，2，……，且$g(0)=1$。（高中同學注意，我們定義$g(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$）

因此，只要求出$\frac{g'(x)}{g(x)}$的Taylor展開式即可。

但是

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)'}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\pi^2S_2=\frac{\pi}{3}$，故得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

同理，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$。

讀者請勿把以上的「推理」當做嚴格的證明。你如果學過複變函數論或Fourier級數論，你自然會證明以上的公式。

(四)

我常感覺，在實際教學中，要介紹一個新的技巧或理論，最好從解決問題著手。毫無來由的把一套新理論塞進學生的腦中，只會使這套理論失去活力，並且還可能使某些學生憎恨數學（或數學老師？）。

像林文東先生從解決S_k的問題，引入生成函數的手法（他以前可能沒聽過什麼是生成函數？），是一種很好的教學法。不過，我不太同意林文東先生的一點是，他把「快」看得太重要了。他說，他提供一種快速求根的同次冪之和的方法。

很快的解決問題，當然是好的。但是，最重要的是，能夠全面的觀察問題，從各種角度（代數的幾何的、分析的、純數學的、應用數學的）去觀察問題與解答，把事物看得深、看得遠，透徹的洞察問題與解答的內部聯繫；把已知的結果推廣，使其提昇到另一個高度；把一套巧妙的解題技巧，變成一套用途更廣泛的理論。這才是要點。

在講解「對稱式」之後，再介紹「生成函數」，這是一個很好的提昇。另一種提昇是鼓勵學生去思考什麼是對稱式，從而引入對稱羣（symmetric groups）與羣的概念，並且可以有系統的介紹交代式、輪換式，甚至是基本不變量（basic invariants）。然後，介紹學生如何應用這些認識去解具有某些對稱性質的多元高次聯立方程式。

我的意思是，老師儘量鼓勵學生思考一些比較具有前瞻性的問題，是老師的責任——也是學生的幸運。

—本文作者任教於台大數學系—