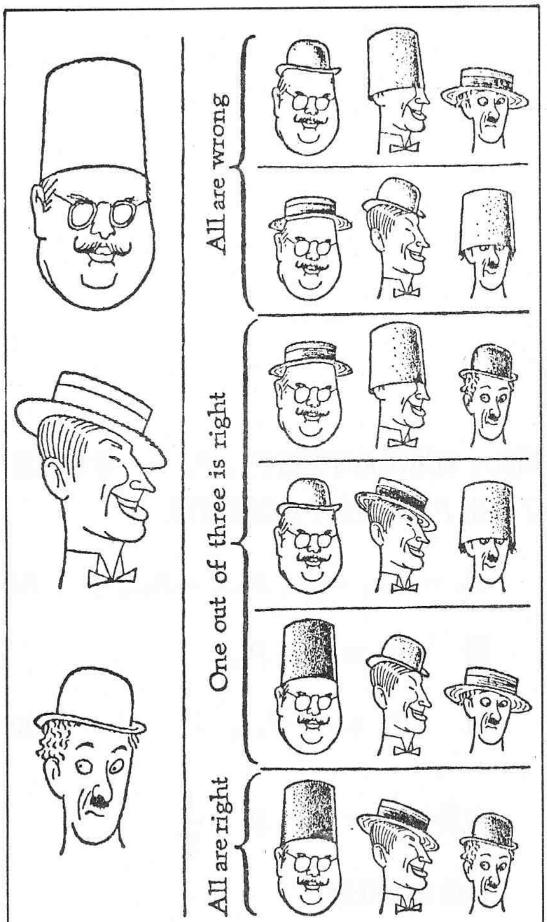

「一個問題的闡明」讀後

戴久永

每當看到「數學傳播」後半部的文章密密麻麻地陳示著許多算式的時候，心中總是不免要興起「這是必要的嗎？」的懷疑。數學問題的解決固然通常免不了計算，但是有時候改爲其他推理方式似乎更見靈巧可喜。另一方面，密集式的推算會使原本對數學害怕的人更加對數學敬而遠之。

「數播」第 28 期中「小小」寫了一篇「一個問題的闡明」，對於高中數學數理本第五冊古典機率章習題 4-4 的一個問題：「戴帽問題」進行研討，筆者在此提供一個英文機率教本上常見的解法大意以供參考，所用爲邏輯思考方式，而非純推算，其技巧有值得學習的地方。

設將編號1至n的n個球隨機置入順序編號的n個盒內，倘若球i在第i個盒內，則稱i被固定，假如1至n沒有任何數被固定，則稱之爲「完全排列」。

現設n個人排成一列，則將n頂帽子隨機分給各人，每人一頂有$n!$種排列法。令$W(n)$表完全排列的方法數，則n人中沒有任何一人得到自己的帽子的機率爲

$$P_n=\frac{W(n)}{n!} \qquad (1)$$

我們若能得出$W(n)$的值，就可得知P_n的值。

以下我們將導出一個遞迴關係，然後用啓始值（最初條件值）產生$W(n)$的值。首先用一個特例來說明。假設$n=4$，試求$W(4)$的值。假定甲乙丙丁 4 人中有一人（姑且設之爲甲）得到自己的帽子，而其他 3 人都拿到非自

已的帽子，如果甲與三人中任一人交換帽子，則 4 人均得到非自已的帽子，而 3 人得到非自已帽子的完全排列數爲$W(3)$；由於，甲可選擇 3 人中任一人交換，使 4 人均得非自已帽子，因此共有 $3W(3)$ 種方法；另一方面，若甲得自己的帽子，欲與其他三人中任一人交換帽時，却發現其中有一人（設爲乙）也取得自已的帽子，則甲與乙互換帽子後，4 人均取得非自已的帽子，這共有$3W(2)$種方法。因此

$$W(4)=3W(3)+3W(2)$$

這種推理也可適用於 n 人的情形，而可得

$$W(n)=(n-1)W(n-1)+(n-1)W(n-2) \qquad (2)$$

若將等式左右兩端各除以 $n!$ ，則得

$$\frac{W(n)}{n!}=\frac{n-1}{n!}W(n-1)+\frac{n-1}{n!}W(n-2)=\frac{n-1}{n}\frac{W(n-1)}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\frac{W(n-2)}{(n-2)!}$$

即

$$P_n=\frac{n-1}{n}P_{n-1}+\frac{1}{n}P_n \qquad (3)$$

若 $n=1$ ，則該人必可得自己的帽子，即 $P_1=0$,假若是 $n=2$ ，則二人均得自己帽子或他人帽子，因此

$$P_2=\frac{1}{2}$$

因此，利用(3)式可算出 P_3，P_4 ……等等。爲了得出 P_n 的通式，由(3)式可得

$$P_n-P_{n-1}=\frac{1}{n}(P_{n-2}-P_{n-1}) \qquad (4)$$

設 $V_n=P_n-P_{n-1}$

則 $V_n=-\frac{1}{n}V_{n-1}$ (5)

由於 $V_2=P_2-P_1=\frac{1}{2}$

因此由(5)可知

$$V_3=-\frac{1}{3!}$$

$$V_4=\frac{1}{4!}$$

即通式爲

$$V_n=(-1)^n\frac{1}{n!} \qquad (6)$$

由於 $P_n=(P_n-P_{n-1})+(P_{n-1}-P_{n-2})+\cdots\cdots+(P_2-P_1)+P_1$

而 $P_1=0$

所以

$$P_n=V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

在微積分的課本中，我們知道

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

及 $e^{-1}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{n!}$

因此當 $n\to\infty$，$P_n \to e^{-1}=0.3678794\cdots$

下表的一些數字可供參考：

帽子數	無人得自己帽子的機率 P_n
2	0.500000
3	0.333333
4	0.375000
5	0.366667
6	0.368056
7	0.367857
8	0.367882

可知即使 $n=8$ 時，P_n 的值已經相當接近 $\frac{1}{e}$ 了。

上例所示的方法就是在排列時，將其中一元素特殊化。我們也可用這種手法解決其他問題，譬如在二項式係數中，有一恒等式爲

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} \tag{7}$$

上式也可用相同技巧證明之。解法如下：

設在 n 件相異物品中任選一件稱之爲 a，則由 n 件中選取 r 件物品時，只有兩種可能，即 n 件中含 a 或不含 a。假若不含 a，我們必須由將 a 除外的 $n-1$ 件物品中取 r 件，共有 $\binom{n-1}{r}$ 種方法，若 r 件中含 a，則僅須由 $n-1$ 件物品中再取 $r-1$ 件，共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 種方法。由於這兩種可能爲互斥，利用加法原理可得

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

以上的證明或許並不十分嚴密，有志的讀者可自己補充。當然，這種方法還可用於其他許多不同的數學問題，至於那種問題適於利用本法，則是所謂「運用之妙，存乎一心」，而無法一一列舉了。

參考資料

1. Kemeny, Schleifer, Snell, Thompson Finite Mathematics with Business Applications 2nd. ed. Prentice-Hall 1972.
2. 戴久永 機率導論 三民書局 民國 72 年 10 月

—本文作者任教於交大管科系—