一些有關多項式的問題

楊重駿

導　言

數學的推動有時往往是由一些好問題的提出。由過去的數播的內容及有關國內加強數學教育的努力，可以看出國內不少具有潛力的優秀學生，本文願能借得數播的一些篇幅向讀者介紹一些易懂的多項式問題，並希望由此能到較滿意的交流。

1. 兩項式其取a 值及b 值的集相等

在所有函數的形式中，多項式是最簡明的一種。有關多項式研究的論著，真可謂汗牛充陳（特別是多項式的零點（或根）的討論）。

其中一個爲大家所知道的一事實（但嚴格的證明卻不簡單）是：任何一非常數的多項式 $p(z)$ 必有一根，其中 z 表複變數（這也是所謂的代數基本定理）。由此可立即推得任何一 n 次的多項式必有且只有 n 個根（任何一 k 重根，算 k 個根），所以任何一個多項式 $p(z)$，若其次數不超過 n 而卻可推演出其有多於 n 個根時，則 $p(z)$ 必恆爲 0，由此我們可得到下面的結果。

定理1 任何兩個次數分別爲 m 與 n 的多項式 $p(z)$ 及 $q(z)$，如果我們能找到 k（$>\max(m,n)$）個不同的值 $a_1, a^2, \cdots, a_k$，使得 $p(z)=a_i$ 時 $q_i(z)=a_i$，及 $q(z)=a_i$ 時 $p(z)=a_i$，$i=1,2,\cdots,k$，則 p 一定恒等於 q。

証： 這是很容易證明的，只需要考慮輔助函數 $H(z)=p(z)-q(z)$，很顯然 H 的次數 $\leqq \max(m, n) < k$，而現依假設 $H(z)$ 至少有 k 個根。所以可推知 $H(z)\equiv 0$ 即 $p=q$，但對於兩個多項式我們是不是一定要找出那麼多個不同的值來一一試驗，才可保證 p，q 的恒等呢？答案是不必要！（見下文）

在史特拉司（Strauss）及阿當斯（Adams）倆人合撰的一篇論文中，引用並證明了下面一個結果：

定理2 設 p，q 爲兩個非常數的多項式，a，b 爲兩不等的常數。設 p，q 滿足下列兩關係

(c_1) $p(z)=a \Longleftrightarrow q(z)=a$（不計其 a 點的重複度）

(c_2) $p(z)=b \Longleftrightarrow q(z)=b$（不計其 b 點的重複度）

（其中記號 $A \Longleftrightarrow B$ 是表示 $A\Rightarrow B$（A 導致 B）及 $B\Rightarrow A$（B 導致 A）同時成立。

如 $p(z)=(z-1)(z-2)$

$q(z)=(z-1)^2(z-2)^3$

則 $p(z)=0 \Longleftrightarrow q(z)=0$）

則 $p\equiv q$

以下我們用記號 $p(z)=a\leftrightarrow q(z)=a$，表示其中不計重複度。

這個定理的證明是出于想像的簡單，但其證明的步驟卻不見得容易想到。我們在此介紹此一精彩的證明。

証： 首先我們要提醒的一事實就是若 $z=c$ 爲多項式 $p(z)$ 的 k 重零根，則 $z=c$ 必爲其導函數 $p'(z)$ 的（$k-1$）重根，現不妨假設 p 之次數 $=n\geqslant q$ 之次數，則考慮一輔助函數 $H(z)=p'(z)[p(z)-q(z)]$，則可見的是 H 的次數 $\leqq 2n-1$，但現在多項式 H 對於 $p(z)-a=0$ 的根及 $p(z)-b=0$ 的根即取零值。同時注意 $p'(z)$ 補足了 $p-a=0$ 及 $p-b=0$ 的根重複度。亦即 H 至少有 $n+n=2n$ 個根（當然其中可能有重根）。由此，我們得結論 $H\equiv 0$ 即 $p\equiv q$，除非 $p'\equiv 0$，但此表示 p 爲一常數與假設不符，原定理得證。

現我們提出下面一個研究的問題：（即可 0 點與 1 點混合起來的集合）

設 $p(z)$，$q(z)$ 爲兩個非常數多項式，今假設

$$p(z)[p(z)-1]=0$$
$$\leftrightarrow q(z)[q(z)-1]=0$$

則 p，q 的關係如何？

很明顯的至少有二個可能的關係。(i) $p\equiv q$ 或 (ii) $p+q\equiv 1$，我們要知道的是除了以上兩種可能的關係外，有沒其他可能的關係？

很可能讀者們或許在經過一番思索後，會覺得似乎該只有此兩可能性了，但不然。至少我們可以指出當 p，q 兩次數不相等時，還有第三種情形發生（即不是 (i) 也不是 (ii)），這個只需借助一個例子就可以說明了。事實上，(i) 或 (ii) 的兩情形是由另一方式看出來的：即若 $(p-a)(p-b)=0$

$$\leftrightarrow (q-a)(q-b)=0$$

則 $(p-a)(p-b)\equiv(q-a)(q-b)$

由此得

$$(p-q)[p+q-(a+b)]\equiv 0$$

即 $p=q$

或 $p+q\equiv a+b$

因此我們所選的例子是

$$(p-1)(p+1)=0$$

$$\leftrightarrow (q-1)(q+1)=0$$

但 $p^2-q^2\not\equiv 0$

即 $p\not\equiv q$ 及 $p\not\equiv -q$

令 $p(z)=\frac{1}{6}(z^4-8z^2+10)$

及 $q=\frac{1}{4}z(z^2-6)$

則可查驗得

$$p^2-1\equiv\frac{1}{36}(z^2-4)^2(z^4-8z^2+4)$$

及 $q^2-1\equiv\frac{1}{16}(z^2-4)(z^4-8z^2+4)$

故 $p^2-1=0 \leftrightarrow q^2-1=0$

但 $p^2-q^2\not\equiv 0$

有了以上的例外情形，我們終於修飾得到下面一個臆測：

臆測1 設 p，q 爲兩同次的非常數多項式。

若

$$p(p-1)=0 \leftrightarrow q(q-1)=0$$

成立

則 $p\equiv q$

或 $p+q\equiv 1$

兩者之一成立。

註： 事實上筆者最近發現早在 1950 年代，G. Young 就曾提出相關的臆測，但他並沒有附加同次的一條件，故顯然非眞。又此一臆測經筆者在多次不同的場合，及通信或論文中，向數學界人士提出，但迄今尙無一肯定或滿意的答覆。很希望讀者中能對此問題作研究，進而求得答案。

推廣問題 一般設 p，q 爲兩同次非常數多項式，T 爲一非常數多項式且至少有兩不同的根，若 $T(p)=0 \leftrightarrow T(q)=0$，則 p 與 q 的關係如何？

2. 多項式的重根數

以下所謂重根是指重複度至少爲 2 的根，前面我們已提及的是若 $z=a$ 爲一多項式 p 的 k 重根，則 $z=a$ 必爲其導函數 $p'(z)$ 的 $(k-1)$ 重根。到底在 $p(z)-a=0$ 及 $p(z)-b=0$ 兩方程式中 $(a\neq b)$ 所有的重根的數目，最多是多少？(我們知道最少可能是 0)這當然和 p 的次數 n 有關，能不能找出一個 n 的函數來表示此一上限？

我們可以問許許多多有關此方面的問題。

研究問題 設 p 爲一 n 次多項式，若 $p-a=0$ 的重根數爲 l，及 $p-b=0$ 的重根數 h，則 l，h，及 n 的關係如何？

研究問題 一般，l，h 及 n 間有什麼較有意義的關係式？

到此筆者早先曾提出一個與定理 2 相類似的臆測，即

設 p，q 爲兩非常數多項式

若 $p=0 \leftrightarrow p=0$

$p'=1 \leftrightarrow q'=1$

則 $p\equiv q$

承德國 Peter Bundschuh 教授與筆者的通訊中指出，上臆測中 p，q 爲等次的要求爲必要的，他並舉例如下：

取

$$p(z)=-\frac{1}{3}(z-1)^2(z+2)$$

$$q(z)=(z-1)(z+2)$$

則易證

$$p=0 \quad \leftrightarrow \quad q=0$$

及 $\quad p'=1 \leftrightarrow q'=1$

而事實上

$$p\neq q$$

所以一個可能正確的臆測該為

臆測2 設 p，q 爲兩同次的非常數多項式

若 $\quad p=0 \quad \leftrightarrow \quad q=0$

及 $\quad p'=1 \leftrightarrow q'=1$

則 $\quad p\equiv q$

研究問題 在前面幾個臆測中，我們要求的是兩個多項式及其導函數間，取0及1的點集的集合相一致。我們可以進一步地問是否集合，可不必全部相一致，結論仍然成立？

3.多項式的合成及分解

在整數論中大家都知道所謂的分解是指一個整數 n 表成不同的質因子的冪次的乘積。我們稱 n 爲質數，若 n 沒有任何少於它本身的質因子者。對於多項式我們也可考慮它的因子的乘積表示，但這並沒什麼特別值得可研究的，因爲根據代數基本定理，一個多項式總可表成若干不同的一次式的乘積，我們現在要探討的是何時一個多項式 $q(z)$ 可表成另外兩個或以上非線性（即一次式）的多項式的合成式，即

$$q(z)=p_1(p_2(\cdots p_n(z)),\cdots) \quad (1)$$

特別當 $n=2$ 時

$$p(z)=p_1(p_2(z)) \quad (2)$$

我們稱 p_1 爲 q 的左因式，p_2 爲 q 的右因式，一般稱(1)爲 q 的一分解。若一個多項式 q 無法表示(2)的形式時，我們就稱 q 爲一質函數（或質多項式）。注意，我們要求 p_1 或 p_2 皆非爲一次式者，因任何一多項式 q 總可表成

$$q(z)=q_1(az+b)$$

的形式；其中 $a(\neq 0)$，b 爲兩常數。又它可表成

$$q_2(cz+d)$$

c，d 爲任何其他兩常數，我們不願因這種的可能造成混淆，特規定什麼情形之下，其實兩種分解是等價的（Equivalent）。

定義 我們稱

$$q(z)=\phi_1(\phi_2\cdots(\phi_m(z))\cdots)$$

及

$$q(z)=\psi_1(\psi_2\cdots(\psi_n(z))\cdots)$$

兩分解爲等價，若且僅若下面兩條件滿足：

(1) $m=n$

(2) 有 $n-1$ 個一次式 $\lambda_1(z)$，$\lambda_2(z)$，……$\lambda_{n-1}(z)$ 存在使得 $\psi_1=\phi_1(\lambda_1)$，$\psi_2=\lambda_1^{-1}(\phi_2(\lambda_2))$，…，$\psi_n=\lambda_{n-1}^{-1}(\phi_n)$

有關多項式的分解論可以說大都被 Ritt 研究了，下面是這方面目前的最佳結果。

定理3 設 $q(z)$ 可表成下面兩分解式：

$$q(z)=\phi_1(\phi_2\cdots(\phi_n(z))\cdots) \quad (3)$$
$$=\psi_1(\psi_2\cdots(\psi_m(z))\cdots)$$

若其中的

$$\phi_i \; (i=1,2,\cdots,n)$$

及

$$\psi_j \; (j=1,2,\cdots,m)$$

皆爲質函數，則此兩分解式必爲等價的。

讀者到此或許要問了，什麼樣的多項式是質函數？很顯然的任何一次爲質數的多項式必爲質函數，但除此之外，目前似乎沒有什麼其他較有意義的充分的條件。

很明顯的對 $q(z)=z^6$ 時它可表成 $(z^2)^3$ 也可表成 $(z^3)^2$，換句話說，

$$q(z) = p_1(p_2(z)) = p_2(p_1(z))$$

其中

$$p_1(z) = z^2 , \quad p_2(z) = z^3$$

這種情形我們說 q 的兩因子爲可交換的，但一般的情形總是不可交換的，所以我們可以提出下面一問題：

研究問題 何種多項式 q，它的兩個因子爲可交換的？

結 論

我們都知道，雖然數學已進展到錯綜複雜、各門各支，但仍然有一些就像費馬（Fernat）最後定理：$x^n + y^n = z^n$（$n \geqslant 3$）無整數解，很簡單，但無法解決的問題。一開始時，大家不知如何去解決，但經過八十年來人們不斷的研討，雖仍未能解決此懸題，但附帶地卻把數學快速地向各方推動，充實起來。希望這篇文章也能把一些讀者帶進一個新的研究方向，由此帶來新的成果。

而事實上，有關分解論，特別是在整函數（entire functions）及有理整函數（meromorphic functions）的研究，已在世界各地進行中，成爲複變函數論中，値分佈理論（Value distribution theory）應用的一支了。最後希望本文能像有人說的"一個好的題目往往比一個好的解法對學生的貢獻更大"。

本文承楊照昆教授過目，並提供改進的意見，在此致謝。

參考資料

1. W.W. Adams & E.G. Straus, " Non-Archimedian analytic functions taking the same values at the same points ". Illinois Journal of Mathematics, Vol. 15, 1971, PP.418～424.

2. R. Nevanlinna,"Le théoréme de Picard-Borel et la théorie des fonctions meromorphes. " Gauthiv-Villars, Paris, 1929 (Theorem 2.6)

本文作者現任敎於
Department of Electric Engineering
Illinois Institute of Technolgy Chicag IL.