以反射計算爲工具討論平面幾何（Ⅱ）

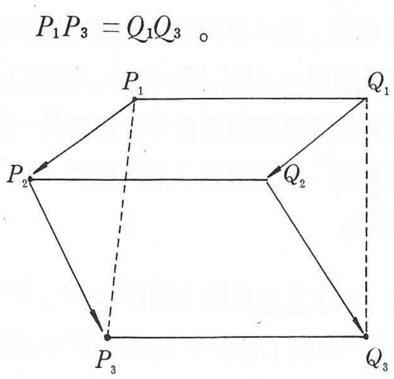
許振榮

§ 3

以反射計算爲工具證明幾何定理

在上面的討論所示：我們可將平面上的幾何定理以反射間的命辭陳述。所以可想到以群論上的關係之計算來證明幾何定理之可能性，以及關於點反射，和直線反射的群論上的關係以幾何定理來解釋的可能性。現在以幾個例子來討論此種可能性。先擧群論上的關係之幾何解釋。

(i) 從 $P_1P_2 = Q_1Q_2$ 及 $P_2P_3 = Q_2Q_3$ 可得 $P_1P_3 = Q_1Q_3$ 。

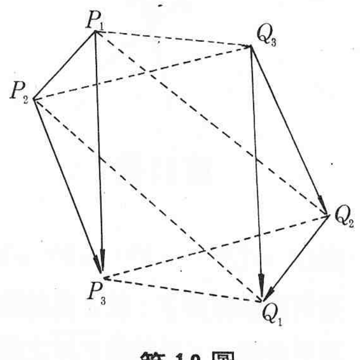


第 9 圖

因 $(P_1P_2)(P_2P_3) = (Q_1Q_2)(Q_2Q_3)$ ，故得 $P_1P_3 = Q_1Q_3$ 。此命辭的幾何的解釋爲：如果 $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ 且 $\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{Q_2Q_3}$ 則 $\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{Q_1Q_3}$ 如第 9 圖所示。

(ii) 從 $P_1P_2 = Q_2Q_1$ 及 $P_2P_3 = Q_3Q_2$ ，可得 $P_1P_3 = Q_3Q_1$ 。

$(P_1P_2)(P_2P_3) = (Q_2Q_1)(Q_3Q_2) = Q_2(Q_1Q_3Q_2) = Q_2(Q_2Q_3Q_1) = Q_3Q_1$ ，此因 $(Q_1Q_3Q_2)^2 = 1$ ，$Q_1Q_3Q_2 = Q_2Q_3Q_1$ 成立之故。幾何的解釋爲：如果 $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_2Q_1}$ ，且 $\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{Q_3Q_2}$ ，則 $\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{Q_3Q_1}$ 。如第 10 圖所示。



第 10 圖

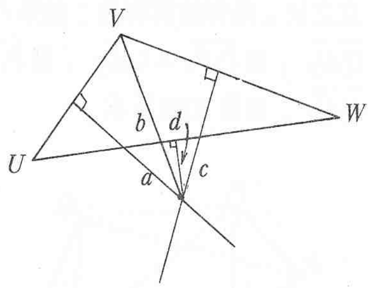
(iii) 如果 $(abc)^2 = 1$ 且 $P_1{}^a = P_2$ ，$P_2{}^b = P_3$ ，$P_3{}^c = P_4$ ，$P_4{}^a = P_5$ ，$P_5{}^b = P_6$ 成立，則 $P_6{}^c = P_1$ 。

因 $(abc)^2=1$ 可得 $P_1^{abcabc}=P_1^1=P_1$。另一方面 $P_1^{abcabc}=P_2^{bcabc}=P_3^{cabc}=P_4^{abc}=P_5^{bc}=P_6^{c}$。故可得 $P_1=P_6^c$。幾何的意義如下：設 a, b，c 三直線爲共點，又六點 $P_1,\cdots\cdots,P_6$ 滿足下列條件：a 爲線段 $\overline{P_1P_2}$ 之垂直平分線且爲 $\overline{P_4P_5}$ 之垂直平分線；b 爲線段 $\overline{P_2P_3}$ 之垂直平分線且爲 $\overline{P_5P_6}$ 之垂直平分線；c 爲線段 $\overline{P_3P_4}$ 之垂直平分線，則 c 亦爲 $\overline{P_6P_1}$ 之垂直平分線。

(iv) 如果 $P_1^A=P_2$，$P_2^B=P_3$，$P_3^C=P_4$，$P_4^A=P_5$，$P_5^B=P_6$，則 $P_6^C=P_1$

因 $(ABC)^2=1$ 爲一恒等關係，可得 $P_1^{ABCABC}=P_1^1=P_1$。另一方面，如在 (iii) 之證明可得 $P_1^{ABCABC}=P_6^C$。故可得 $P_6^C=P_1$，幾何的解釋如下：設 A 爲線段 $\overline{P_1P_2}$ 之中點亦爲 $\overline{P_4P_5}$ 之中點，B 爲線段 $\overline{P_2P_3}$ 之中點亦爲 $\overline{P_5P_6}$ 之中點，C 爲線段 $\overline{P_3P_4}$ 之中點，則 C 亦爲 $\overline{P_6P_1}$ 之中點。

(v) 如果 $U^a=V$，$V^b=V$，$V^c=W$ 且 $abc=d$，則 $U^d=W$。



第11圖

因 $U^d=U^{abc}=V^{bc}=V^c=W$ 之故。幾何的解釋如下：設 a 爲線段 $\overline{UV}$ 之垂直平分線，c 爲線段 $\overline{VW}$ 之垂直平分線，V 在直線 b 上，又 abc 爲一直線 d，則 d 爲線段 $\overline{UW}$ 之垂直平分線。故如果 a，b，c 爲共點，我們可得關於 $\triangle UVW$ 之外心定理。此事實同時給共點的三直線 a，b，c 之第四反射直線 d，即滿足 $abc=d$ 之直線 d 之作圖法。

(vi) 如果 $u^a=v$，$v^b=v$，$v^c=w$ 且 $abc=d$，則 $u^d=v$。

證明與 (v) 之證明相似。幾何的解釋如下：假設 u,v,w 成一個三角形。如果 a 爲二邊 u,v 所成的角之平分線，b 與邊 v 垂直，c 爲二邊 v,w 所成的角平分線，又 $abc=d$ 成立，則 d 爲二邊 u,w 所成的角之平分線。即三邊形 u,v,w 之第三角的平分線經過其他二角之平分線之交點。即是三角形之內心定理成立。

(vii) 設 $CAB=U$，$ABC=V$，$BCA=W$，則 $UC=CV=BA$，$VA=AW=CB$，及 $WB=BU=AC$ 成立。

因我們已知對於任何三點 A,B,C，$(ABC)^2=1$ 成立，故 $ABC=CBA$ 成立。因之，$V=ABC=CBA$，而 $CV=BA$。同理 $CAB=BAC$ 而 $U=CAB$，故 $UC=BA$ 成立。因之，$UC=CV=BA$ 成立。其外二式之證明相同。幾何的解釋如下：設 $CABU$，$ABCV$，$BCAW$ 各成一個平行四邊形，則 $\overrightarrow{UC}=\overrightarrow{CV}=\overrightarrow{BA}$ 成立，故 $\overrightarrow{UV}$ 與 $\overleftrightarrow{BA}$ 平行且 $\overline{UV}=\overline{2BA}$。因之，如果 ABC 爲一三角形，則 UVW 爲其三邊分別與 $\triangle ABC$ 之三邊平行的三角形。又 A,B,C 分別爲邊 VW, WU, 和 UV 的中點。故 $\triangle UVW$ 之三邊的垂直平分線分別爲 $\triangle ABC$ 之三垂線。我們已知：三角形之三邊的垂直平分線交於一點。故可得〞三角形之三垂線交於一點〞的結果。

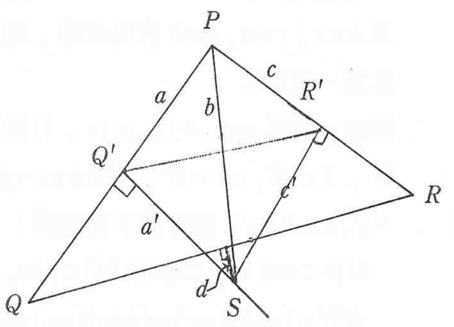
(viii) （(vii)之逆命辭）設 $U^C=V$，$V^A=W$，$W^B=U$，則 $U=CAB$，$V=ABC$，$W=BCA$。

由假定可得 $U^{CAB}=V^{AB}=W^B=U$。設 CAB

$=U'$，則得$U^{U'}=U$，故$UU'=U'U$成立。我們欲證$U'=U$。設$U\fallingdotseq U'$，則UU'爲對合的，但是UU'爲一平移。已知如果α爲一平移，則$\alpha^2\fallingdotseq 1$，卽平移不可能爲對合的。故$U\fallingdotseq U'$不能成立。因之，$U=U'$。

注意 i：從 (vii) 和 (viii) 可得下列結果：三角形二邊之中點之連結線與第三邊平行。

注意 ii：設a，b，c經過同一點P。此時滿足$abc=d$的直線d之另一求法如下：在b上取一與P相異的點S。從此點S至直線a，c下垂線使其垂足分別爲Q'，R'。從這一點S向這二個垂足的連結線下垂線，則此垂線爲d。



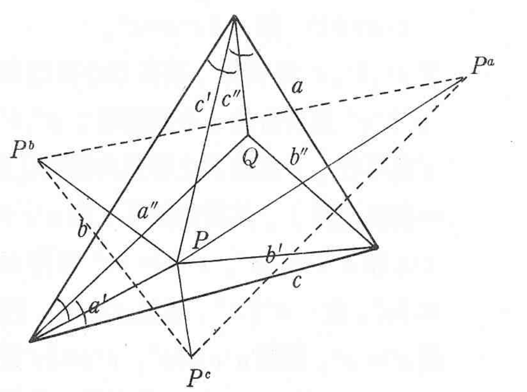
第 12 圖

在 (v) 項所述的作圖，從點S至直線QR之垂線爲d。此處Q'爲線分PQ之中點R'爲線分PR之中點。在新的作圖，從S至直線$Q'R'$所下的垂線爲d。因爲$Q'R'\parallel QR$故此二垂線必爲相同。即新舊二作圖得到同一結果。由此作圖又可得下列結果：若$aa'=Q'$，$cc'=R'$，$abc=d$時$a'b\,c'$爲共點之充要條件係$Q'R'\perp d$。（參考 § 2 (12) 的注意）。

(ix) 設$ba'c=a''$，$cb'a=b''$，$ac'b=c''$，且$a'b'c'$爲對合的，則$a''b''c''$亦爲對合的。

因$a''b''c''=(ba'c)(cb'a)(ac'b)=b(a'b'c')=(a'b'c')^b$成立，又$a'b'c'$爲對合的，故$(a'b'c')^b$亦爲對合的。卽$a''b''c''$爲對合的。幾何的解釋如下：設$a,b,c$爲一三角形之三邊。由$ba'c=a''$可得$ba'=a''c$。因$b\nparallel c$，$a',a'',b,c$爲共點。故$\measuredangle(b,a')=\measuredangle(a'',c)$。同理$\measuredangle(c,b')=\measuredangle(b'',a)$且$\measuredangle(a,c')=\measuredangle(c'',b)$。因爲$a'b'c'$爲對合的，且$a'$，$b'$，$c'$不平行（因$c'$在$\measuredangle(a,b)$中，$b'$在$\measuredangle(a,c)$中）故$a'$，$b'$，$c'$爲共點。設$P$爲這些三直線之共有點。此時$a''b''c''$亦爲對合的。如果$a''$，$b''$，$c''$不平行，則$a''$，$b''$，$c''$爲共點。設$Q$爲$a''$，$b''$，$c''$之共有點。我們把點$Q$稱爲$P$之等角共軛點（isogonal conjugate ponit）。又把對應$P\to Q$稱爲等角共軛點對應。

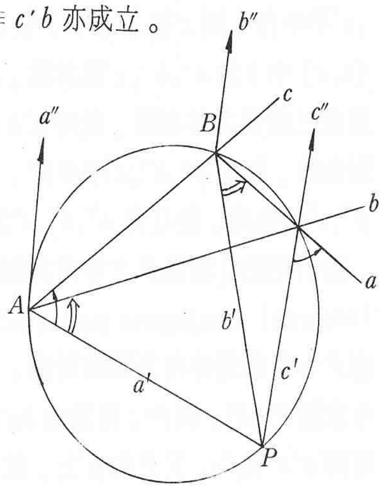
今求點P^a，P^b，和P^c。因爲由$ba'c=a''$可得$a'=ba''c$，又P在a'上，故$P=P^{a'}=P^{b\,a''c}=((P^b)^{a''})^c$。因之，$(P^b)^{a''}=P^c$。故$a''$爲線段$\overline{P^bP^c}$之垂直平分線。同理$b''$爲$\overline{P^aP^c}$之垂直平分線。$c''$爲$\overline{P^aP^b}$之垂直平分線。卽$Q$爲三角形$\triangle P^aP^bP^c$之三邊的垂直平分線之交點。卽點$Q$爲$\triangle P^aP^bP^c$之外心。



第 13 圖

定義：設 a, b 爲相交的二直線，d, c 亦爲相交二直線。設 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ 爲從平面上一點 O 所引的分別與 a, b, c, d 各直線平行的直線。此時如果 $\bar{a}\bar{b}=\bar{d}\bar{c}$，則稱 a, b 和 d, c 決定同一有向角，並以 $ab\equiv dc$ 之符號表之。

(x) **關於圓之內接四邊形之定理** 設 $ABCD$ 爲一完全四邊形。A 在直線 a', b, c 上；B 在直線 a, b', c 上；C 在直線 a, b, c' 上；P 在直線 a', b', c' 上。又設直線 a', c, c', a 不共點。此時如果 $a'c\equiv c'a$ 成立，則 $a'b\equiv b'c$ 成立，且 $b'c\equiv c'b$ 亦成立。



第 14 圖

證明：設 a''，b''，c'' 爲分別由下列關係所定義的直線：

$a'c=ba''$ 即 $bc'c=a''$,

$b'a=cb''$ 即 $cb'a=b''$,

$c'a=bc''$ 即 $bc'a=c''$。

又 a', b', c' 爲共點，故在 (ix) 項已知 $a''b''c''$ 爲對合的。今將證明：a'', b'', c'' 爲平行。（故點 P 之等角共軛點 Q 爲一無限遠點）。其證明如下：由 $a'c\equiv c'a$ 和 $a'c\equiv ba''$，$c'a=bc''$ 可得 $ba''=bc''$。故 $a''\parallel c''$，並且 $a''\neq c''$。因如果 $a''=c''$，則因 $a'c=ba''$，$c'a=bc''$ 可得 $a'c=c'a$ 故 a', a, c', c 爲共點，此與假定不合之故。因爲 $a''b''c''$ 爲對合的，又 $a''\parallel c''$, $a''\neq c''$, 故 $a''\parallel b''$。因之可得 $ca''\equiv cb''$。由此關係和 $a'c=ba''$（故 $ba'=a''c$，$a'b=ca''$），$b'a=cb''$ 可得 $a'b\equiv b'a$。同理，可得 $b'c\equiv c'b$。

注意：應用此定理可證明下列 Pappus-Pascal 的擬似定理（證明請看：D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie 一書中的證明）：

定理：設 $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ 爲一六邊形，其頂點交互地落在相異二直線 a, b 上。即點 A_i 在直線 a 上，並不在 b 上；點 B_i 在 b 上，並不在 a 上。此時如果二雙對邊爲平行，則第三雙對邊亦爲平行。

(xi) **垂線定理** 設 $u\perp a$, $v\perp b$, $w\perp c$ 成立，並且 buc, cva, awb 均爲直線，則 uvw 亦爲一直線。

證明 因爲 $u\perp a$, $v\perp b$, $w\perp c$，可設 $au=U$，$bv=V$, $cw=W$。又設 $buc=p$, $cva=q$, $awb=r$，則可得下列關係：

$$Up^c=au(cbu)=au(ubc)=abc,$$
$$p^bU=(ucb)(au)=(bcu)(ua)=bca,$$
$$Up^cW=(abc)(cw)=abw=wba=a(awb)a=r^a,$$
$$p^bUq^a=(bca)(acv)=bv=V,$$
$$UqW=(ua)(cva)(cw)=(ua)(avc)(cw)=uvw。$$

設 $b'=(U, p^c)$ 爲從點 U 至直線 p^c 所下的垂線，$c'=(U, p^b)$，則得

$(c')^a=(c')^{Ua}$（因 U 在 c' 上，即 $c'^U=c'$）

$=(c')^u=(U,p^b)^u=(U^u,p^{bu})=(U,p^{pc})=(U,p^c)=b'$（因 U 在 u 上，且 $buc=p$ 故 $bu=pc$ 之故）

如此，已得 $(c')^a=b'$。又從 $Up^cW=r^a$

可得$Up^c=r^aW$。此式表示：經過U而與p^c垂直的直線b爲$\overleftrightarrow{UW}$且直線$\overleftrightarrow{UW}$亦與r^a垂直。故W在直線b'上。又從$p^bUq^a=V$可得$p^bU=Vq^a$。此式表示：經過U垂直於p^b的直線c'爲經過V而垂直於q^a之直線。故$c'\perp q^a$。由此式又得$c'^a\perp q$（因$(c')^a=c'$，$(q^a)^a=q$而且垂直性在等長變換下不變）。故由$c'^a=b'$可得$b'\perp q$。在上面補助定理2.1已證UqW爲一直線之充要條件係直線UW與q垂直。現在已經證明了U, W在直線b'上且$b'\perp q$，故$UqW=uvw$爲對合的。注意：$c'^a=b'$之另一證明如下：$Up^c=abc\neq 1$，故Up^c爲一移射。其軸爲b'，$p^bU=bca=(abc)^a$亦爲一移射，其軸爲c'亦爲b'^a。故得$b'^a=c'$。

於上面我們應用反射間的計算來證明了平面幾何的定理。所以我們可推想到：如果有了關於等長變換群之元素間的命辭，則對於用反射計算來證明幾何定理時可能有很大的幫助。其實有幾個如此的命辭。現在來列舉一二個例子於下：

Thomsen的補助定理： 設α，β爲反向等長變換又滿足$\alpha\neq 1$及$\alpha^\beta=\alpha^{-1}$之關係，則α爲一直線反射，或β爲一直線反射。

證明　我們已知：任何反向等長變換爲一直線反射，或爲一移射。若α爲一直線反射，α^β亦爲一直線反射。如果α爲一移射，則α^β亦爲一移射。任何移射α可表成$\alpha=gU$之形狀。此時從U至直線g所下的垂線爲移射α之軸$[\alpha]$。α爲一直線反射時α亦可表成$\alpha=gU$之形狀，但是U在g上。如果h爲經過點U而垂直於g之直線，則$\alpha=gU=g(gh)=h$。此時在U處垂直於g之直線h亦稱爲直線反射α之軸$[\alpha]$。故此時$\alpha=[\alpha]=h$成立。現在我們先證明$[\alpha]=[\alpha^{-1}]$成立：如果α爲一直線反射$\alpha=\alpha^{-1}$故$[\alpha]=[\alpha^{-1}]$成立。如果$\alpha=gU$爲一移射，$\alpha^{-1}=(gU)^{-1}=U^{-1}g^{-1}=Ug$，故$[\alpha^{-1}]$爲從$U$至直線$g$所下的垂線，故$[\alpha]=[\alpha^{-1}]$成立。其次我們來證明：$[\alpha^\beta]=[\alpha]^\beta$成立：$\alpha$爲一移射時，在上面已證了$[\alpha^\beta]=[\alpha]^\beta$。$\alpha$爲一直線反射時，$\alpha=gU$且$U=gh$，故$\alpha^\beta=(gU)^\beta=g^\beta U^\beta$，且$U^\beta=(gh)^\beta=g^\beta h^\beta$。此處$g^\beta$, h^β均爲直線反射。故$\alpha^\beta=g^\beta g^\beta h^\beta=h^\beta$因爲$[\alpha]=h$，故$[\alpha^\beta]=h^\beta=[\alpha]^\beta$。卽$[\alpha^\beta]=[\alpha]^\beta$成立。現在因爲$\alpha^\beta=\alpha^{-1}$，可得$[\alpha]^\beta=[\alpha^\beta]=[\alpha^{-1}]=[\alpha]$，卽$[\alpha]^\beta=[\alpha]$。此關係表示：直線$[\alpha]$爲在變換$\beta$之下不變。因爲$\beta$爲一反向等長變換，故$\beta$爲一直線反射或爲一移射。所以有下列二種可能性：(1) β爲一與直線$[\alpha]$垂直之直線（卽β爲一直線反射的情形）；(2) β爲以$[\alpha]$爲軸的移射（因其軸爲移射的唯一的不變直線）。現在我們僅須證明：在(2)中α爲一直線。爲了要證明此事實，我們先證明下列事情：如果二個移射γ, δ以同一直線爲軸，則$\gamma\delta=\delta\gamma$成立。其證明如下：設$\gamma=fU$和$\delta=gV$以同一直線爲軸，則從點$U$至直線$f$所下的垂線等於從點$V$至直線$g$所下的垂線。設此直線爲$h$。又設$U=f'h$, $V=g'h$，則$f'\perp h$，$g'\perp h$而$f\parallel f'$, $g'\parallel g$。故f, f', g, g'爲互相平行的直線。此時$\gamma\delta=fUgV=fhf'ghg'=hff'hgg'=hfhf'gg'=ff'gg'$。同理$\delta\gamma=gg'ff'$。因爲$f$, f', g, g'爲平行，可得$\gamma\delta=\delta\gamma$。現在在(2)項中，$\beta$之軸$=[\alpha]=\alpha$之軸。故由剛才證明的結果可得$\alpha\beta=\beta\alpha$。故$\alpha^\beta=\alpha$成立。又從假定$\alpha^\beta=\alpha^{-1}$可得$\alpha=\alpha^{-1}$，卽$\alpha$爲對合的。故$\alpha$爲一直線反射且$\alpha=[\alpha]$。

現在給予此補助定理一個應用的例子。卽給垂線定理之另一證明。

垂線定理的另一證明　我們仍使用上面(xi)項垂線定理處的符號和假設，又abc假設不爲對合的。因$a\perp u$故$a^u=a$。因$(buc)^2=1$可得$(cub)^2=1$，卽$cubcub=1$。故$ubcu=cb$，卽$(bc)^u=cb$。因此，$(abc)^{uvw}=(a^u(bc)^u)^{vw}=(a(cb))^{vw}=((ac)b)^{vw}=((ac)^v b^v)^w=(cab)^w=c^w(ab)^w$

$=c(ba)=cba$。即 $(abc)^{uvw}=(abc)^{-1}$ 成立。因為 abc 不為一直線，故依上列 Thomsen 的補助定理 uvw 必為一直線。即 uvw 為對合的。

關於九直線的補助定理　假設給了滿足 $\alpha_1\neq\alpha_2$，$\beta_1\neq\beta_2$ 的 6 個等長變換 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1 β_2,β_3。又設 8 個乘積 $\alpha_i\beta_k$（$i,k=1,2,3$ 但是 $(i,k)\neq(3,3)$ 均表示直線，則第 9 個乘積 $\alpha_3\beta_3$ 亦為一直線。

證明　如果 $\beta_3=\beta_1$，則 $\alpha_3\beta_3=\alpha_3\beta_1$，故補助定理的結論顯然為眞確。所以，不妨假設 $\beta_3\neq\beta_1$。在補助定理中已假設 $\beta_2\neq\beta_1$。明顯地下列關係成立：

(a)　$(\alpha_1\beta_1)^{-1}(\alpha_1\beta_2)=(\alpha_2\beta_1)^{-1}(\alpha_2\beta_2)$
$=(\alpha_3\beta_1)^{-1}(\alpha_3\beta_2)=\beta_1{}^{-1}\beta_2$，

(b)　$(\alpha_1\beta_1)^{-1}(\alpha_1\beta_3)=(\alpha_2\beta_1)^{-1}(\alpha_2\beta_3)$
$=\beta_1{}^{-1}\beta_3$。

在這二式的任一 $(\alpha_i\beta_k)^{-1}(\alpha_i\beta_l)$ 形狀的乘積中，所乘的二個直線反射 $(\alpha_i\beta_k)$ 和 $(\alpha_i\beta_l)$ 均相異。此因 $\beta_1\neq\beta_2$ 和 $\beta_1\neq\beta_3$ 成立之故。一般而言，三直線 a,b,c 屬於一線束（即 a,b,c 為共點，或為平行）之充要條件係 abc 為一直線反射。現在因 $(\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_1)^{-1}(\alpha_1\beta_2)=(\alpha_2\beta_2)$ 為一直線（反射），故 $(\alpha_2\beta_1),(\alpha_1\beta_1),(\alpha_1\beta_2)$ 屬於一線束。又因 $(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_1)^{-1}(\alpha_2\beta_2)=(\alpha_1\beta_2)$ 為一直線，故 $(\alpha_1\beta_1),(\alpha_2\beta_1),(\alpha_2\beta_2)$ 屬於一線束。因為此二線束共有二個相異直線 $(\alpha_1\beta_1)$ 及 $(\alpha_2\beta_2)$，故此二線束其實為同一線束。即 $(\alpha_2\beta_1),(\alpha_1\beta_1),(\alpha_1\beta_2),(\alpha_2\beta_2)$ 四直線屬於同一線束。同理可證：$(\alpha_1\beta_1),(\alpha_3\beta_1),(\alpha_3\beta_2),(\alpha_1\beta_1)$ 四直線屬於同一線束。這二個線束又共有二個相異直線 $(\alpha_1\beta_1)$ 及 $(\alpha_1\beta_2)$，故這二個線束，其實為同一線束。因此，下列六個直線屬於同一線束：

$(\alpha_1\beta_1),(\alpha_1\beta_2),(\alpha_2\beta_1),$
$(\alpha_2\beta_2),(\alpha_3\beta_1),(\alpha_3\beta_2)$。

同理可證下列四直線又屬於同一線束：

$(\alpha_1\beta_1),(\alpha_1\beta_3),(\alpha_2\beta_1),(\alpha_2\beta_3)$。

但是最後這二個線束又共有二個相異直線 $(\alpha_1\beta_1)$ 和 $(\alpha_2\beta_1)$，故這二個線束其實為同一線束。因此，有一個線束 G 存在，它可包含在補助定理中所提的所有 8 個直線。

現在，$(\alpha_3\beta_1)^{-1}(\alpha_3\beta_3)=\beta_1{}^{-1}\beta_3=(\alpha_1\beta_1)^{-1}(\alpha_1\beta_3)=(\alpha_2\beta_1)^{-1}(\alpha_2\beta_3)$，故 $(\alpha_3\beta_3)=(\alpha_3\beta_1)(\alpha_1\beta_1)^{-1}(\alpha_1\beta_3)$，又 $(\alpha_3\beta_1),(\alpha_1\beta_1),(\alpha_1\beta_3)$ 屬於同一線束 G，故 $(\alpha_3\beta_3)$ 為一直線。

下列定理可視為此補助定理的一特殊情形：

定理（成雙定理）　設 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 c_1,c_2,c_3，g 為滿足下列條件之直線：

(α)　$a_1a_2a_3$ 為一直線，且 $a_1a_2=b_2b_1$，$a_1a_3=b_3b_1$，

(β)　對於 1，2，3 三字之每一置換 i,k,l，各積 $c_ia_kc_l$ 均為一直線。

(γ)　$c_1b_1\neq c_2b_2$，

(δ)　c_1b_1g, c_2b_2g 各為一直線。

則 c_3b_3g 亦為一直線。

注意：如果 $a_1a_2a_3$ 為一直線，則從下列三條件中之任何二條件可推出第三條件：

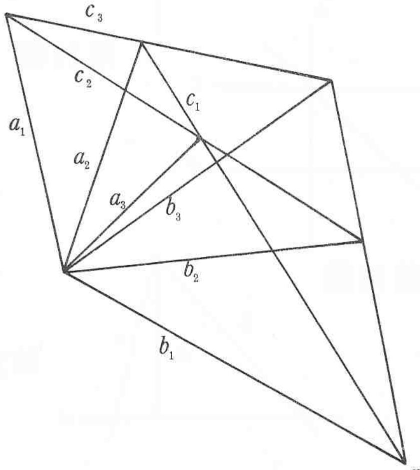
$a_1a_2=b_2b_1$，$a_1a_3=b_3b_1$，$a_2a_3=b_3b_2$。

注意的證明：因為 $a_1a_2a_3$ 為一直線，可得 $(a_1a_2a_3)^2=1$。因此 $a_1a_2a_3=a_3a_2a_1$ 成立。現在假設第一，第二兩條件成立。則由 $a_1a_2=b_2b$ 可得 $a_1a_2b_1b_2=1$，故得 $b_1b_2=a_2a_1$。此時，可得 $a_2a_3=a_1a_1a_2a_3=a_1a_3a_2a_1=(a_1a_3)(a_2a_1)=(b_3b_1)(b_1b_2)=(b_3b_2)$，即由第一，第二條件已得第三條件。

成雙定理之證明：因為 $a_1a_2=b_2b_1$，條件 (γ) $c_1b_1\neq c_2b_2$ 與條件 $a_1a_2\neq c_2c_1$ 同值。此因，由 $c_1b_1\neq c_2b_2$ 可得 $c_2c_1b_1b_2\neq1$，故 $c_2c_1a_2a_1\neq1$。再由此式，可得 $c_2c_1\neq a_1a_2$ 之故。從此條件又可得 $a_1c_2\neq a_2c_1$。因此 $b_3a_1c_2\neq b_3a_2c_1$。現在對於 $b_1a_3c_2=b_3a_1c_2$，$b_2a_3c_1=b_3a_2c_1$，g 和 c_1b_1,c_2b_2,c_3b_3 等六元素有 $b_3a_1c_2\neq b_3a_2c_1$ 和 $c_1b_1\neq c_2b_2$ 二關係成立。並且它們間的乘積之表如下：

	$b_1a_3c_2=b_3a_1c_2 \ne$	$b_3a_2c_1=b_2a_3c_1$	g
c_1b_1	$c_1a_3c_2$	$(b_1b_2a_3)^{c_1}=(a_2a_1a_3)^{c_1}$	c_1b_1g
$\ne$			
c_2b_2	$(b_2b_1a_3)^{c_2}=(a_1a_2a_3)^{c_2}$	$c_2a_3c_1$	c_2b_2g
c_3b_3	$c_3a_1c_2$	$c_3a_2c_1$	c_3b_3g

此表的諸元素中，依條件 $\beta)$，$c_1a_3c_2, c_3a_1c_2, c_2a_3c_1, c_3a_2c_1$ 爲直線。又依條件 $\delta), c_1b_1g$, c_2b_2g 爲直線。依條件 $\alpha)$ $a_1a_2a_3$ 爲直線，故 $(a_1a_2a_3)c_2$ 亦爲直線。因爲 $(a_1a_2a_3)^2=1$，故 $(a_2a_1a_3)^2=1$ 成立。卽 $a_2a_1a_2$ 爲一直線，故 $(a_2a_1a_3)c_1$ 亦爲一直線，因此，上表的九個乘積中除了 c_3b_3g 之外的八個均爲直線。故依上列補助定理 c_3b_3g 亦爲直線。

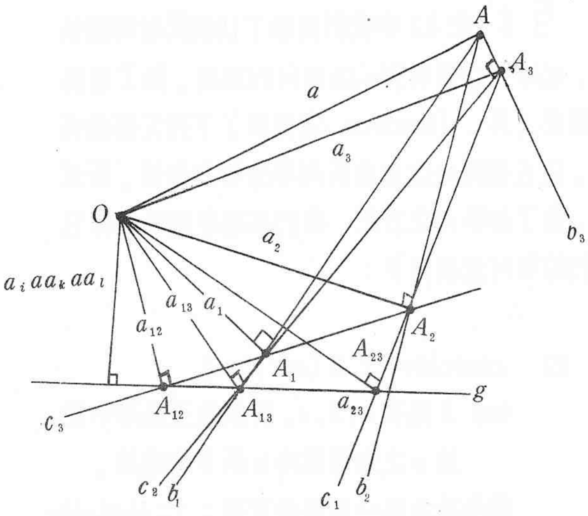


第 15 圖

下列定理可視爲成雙定理之一例：

定理（等於Simson線定理）：設 O，A 爲相異二點，b_1，b_2，b_3 爲經過 A 且不經過 O 之三直線。對於 $i=1,2,3$ 從點 O 向直線 b_i 下垂線 a_i 使 A_i 爲其垂足。其次對於從 1，2，3所得的任一組合 (i,k)，從點 O 向 A_i，A_k 之連結直線 (A_i, A_l) 下垂線 a_{ik}，又設 A_{ik} 爲這些垂線之垂足。則三點 A_{12}，A_{23}，A_{31} 爲共線。

對於 1,2,3 之任一置換 i,k,l；設 $(A_i, A_k) = c'_l$，又設 $(O,A)=a$。因爲 $a_ib_i=A_i$，$i=1,2,3, A_1, A_2, A_3$ 三點在以 OA 爲直徑的圓周上。一般而言，如果 $c_1c_2c_3$ 爲內接於一圓之三角形，又 O 爲此圓上任一點，則考慮此圓之直徑 OA，並設 $\overleftrightarrow{AA_1}=b_1$，$\overleftrightarrow{AA_2}=b_2$，$\overleftrightarrow{AA_3}=b_3$，



第 16 圖

則得上列定理之構圖。此時上述定理之主張爲從 O 至 c_i 所下的垂線之垂足 A_{12}，A_{23}，A_{31} 爲共線 g。如此，g 爲圓之內接三邊形 $c_1c_2c_3$ 之所謂Simson線。

此定理可視爲上述成雙定理之一例如下：因 a, a_1, a_2, a_3 屬於一線束（它們共有點 O），對於 1,2,3 之任一置換 i,k,l，我們可使 a_i 對應於 $a_i'=a_kaa_l=a_{kl}$（此爲一直線）注意：此處的 a_i' 是上述成雙定理的 b_i。此時 $a_ia_k=a_iaa_l\ a_laa_k=a_k'a_i'$ 成立。卽 $a_1a_2=a_2'a_1'$，$a_1a_3=a_3'a_1'$，$a_2a_3=a_3'a_2'$ 成立。又再使 a 對應於 $a'=(a_iaa_k)aa_l=a_laa_kaa_i$（因 a_{12}，a_{13}，a_{23}，a_1, a_2, a_3, a 屬於同一線束），則又得 $aa_i=(a_kaa_l)(a_laa_kaa_i)=a_i'a'$。且 $a_k'a'a_l'=(a_laa_i)(a_iaa_kaa_l)(a_kaa_i)=a_l(a_kaa_l)(a_kaa_i)=a_l(a_laa_k)(a_kaa_i)=a_i$ 成立。此時因爲 $a_2aa_3=a_1'$ 爲一直線，$a_2b_2=A_2$，$a_3b_3=A_3$，又 b_2ab_3 爲一直線，故依補助定理2.1得知 $c_1 \perp a_1'$。此因 A_2, A_3 在 c_1 上之故。同理 $c_2 \perp a_2'$，$c_3 \perp a_3'$ 成立。因此，依上述成

變定理得知：$A_{12}=c_3a_3'$，$A_{13}=c_2a_2'$，$A_{23}=c_1a_1'$ 爲共線。

§ 1 在§2中我們列舉了18個反射間關係，並陳述它們所表示的幾何的意義。除了這些關係之外，Thomsen 還列舉了下列五個關係。這五個關係比以前所列舉的較爲複雜。所以，爲了初學者之方便，我們亦想詳細地解釋它們的幾何意義於下：

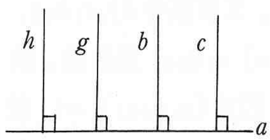
(19) $ahabchbc=1$ 且 $(abc)^2=1$

$\Longleftrightarrow$ h 爲在 a,b,c，所成的三邊形中從邊 a 之對頂點向 a 所下的垂線。

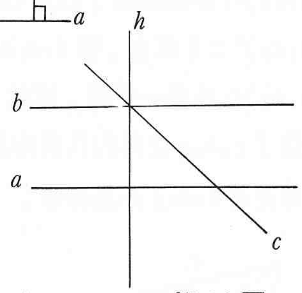
從所給的第一個條件可得：$1=ahabchbc=ahahhbchbc=(ah)^2(hbc)^2$。此處 hbc 爲一直線反射，或爲一移射，但均可表成 $hbc=kV$ 之形狀。設 g 爲經過 V 而與 k 垂直的直線。設 f 爲經過 V 垂直於 g 之直線，則 $V=fg=gf$ 成立。此時 $hbc=kgf=kfg$，故 $(hbc)^2=kgfkgf=kfggkf=(kf)^2$ 爲一平移或爲1（即當 $f=k$ 成立時）。故若 $f\neq h$ 得 $1=(ah)^2(kf)^2$ 即 $(kf)^2=(ha)^2$。如果 $k=f$，即 $(hbc)^2=1$ 成立時，則得 $(ha)^2=1$ 故 $ha=P$ 而 $h\perp a$，又 h,b,c 屬於一線束（此亦爲下列(1)之情形。）

如果 $f\neq h$，$(kf)^2$ 可能滿足 $(kf)^2=1$ 或 $(kf)^2\neq 1$。先考慮 $(kf)^2\neq 1$，$(ha)^2\neq 1$ 之情形。因爲 $k\parallel f$，$(kf)^2$ 爲一平移故 $(ha)^2$ 亦爲一平行。設 K,F 爲垂直於 k,f 之一直線與 k,f 之交點，H,A 爲與 h,a 垂直的直線與 h,a 之交點。則 $(kf)^2$，$(ha)^2$ 分別可由 $4\overrightarrow{KF}$ 和 $4\overrightarrow{HA}$ 表之。因 $(kf)^2=(ha)^2$ 可得 $4\overrightarrow{KF}=4\overrightarrow{HA}$，即 $\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{HA}$。故得 $kf=ha$。從此關係可得 $hkf=a$。此時由 $hbc=kfg$ 又可得 $bc=hkfg=ag$。由此式再得 $abc=g$。因此 $(abc)^2=1$ 與 $(abc)^2\neq 1$ 之假定不合。

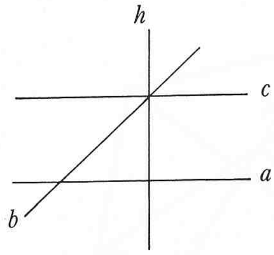
因此，我們只要考慮 $(kf)^2=(ha)^2=1$ 之情形。此時 $(ha)^2=1$ 表示 $h\perp a$，而 $(hbc)^2=(kf)^2=1$。故有下列幾種情形可能發生：(1) h,b,c 爲平行；(2) h,b,c 爲共點。如果(1)發生，可得第17圖之情形。即 $(bcZ)^2=1$ 成立。



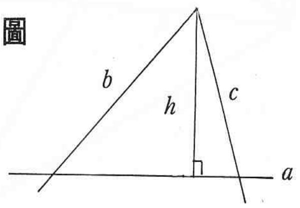
第17圖



第18圖



第19圖



第20圖

如果(2)發生，則有下列三種情形：即(2a)第18圖的情形(2b)第19圖的情形，(2c)第20圖的情形。(2a)的情形可由 $(abZ)=1$ 特徵化。(2b)的情形可由 $(acZ)^2=1$ 特徵化。要使（1），(2a)和(2b)諸情形除外，我們要假設 $(bcZ)^2\neq 1$，$(abZ)^2\neq 1$ 及 $(acZ)^2\neq 1$ 之三條件。如果再假設此三條件，則僅有上述(2c)之情形可能發生。此時 h 爲在 a,b,c 所成的三邊形中從 a 的對頂點向邊 a 所下的垂線。

(20) $bcafacbf=1$，且 $(abc)^2\neq 1$

$\Longleftrightarrow$ f 爲 a,b,c 三直線所成的三邊形的

垂足三角形之邊中對應於邊 c 之邊。要使三直線 a,b,c 成一三邊形，我們假設 $(abZ)^2\neq1$，$(bcZ)^2\neq1$，且 $(caZ)^2\neq1$ 成立。此時假設 $u\perp a$，$v\perp b$ 及 $w\perp c$。並設 $au=ua=U$，$bv=vb=V$，$cw=wc=W$。又設 $buc=p$，$cva=q$，$awb=r$ 爲直線，則得 $p^b=ucb$，$q^a=acv$ 等。此時△UVW爲 a,b,c 所成的三邊形之垂足三角形。設在△UVW中頂點W之對邊爲c'，則c'爲二點U，V所決定的直線。

現在，因爲 $acb=(au)(ucb)=Up^b=(acv)(vb)=q^aV$，故移射 acb 之軸＝經過U而垂直於 p^b 之直線＝經過V而垂直於 q^a 之直線＝UV所決定的直線＝c'。應用這些事實，可容易地證明(20)所述的事實如下：由 $bcafacbf=1$ 可得 $bcafacb=f$，即 $(f)^{acb}=f$。因爲移射之軸爲移射的唯一不變直線，故直線 f 爲移射 acb（因爲 $(abc)^2\neq1$，故 $(acb)^2\neq1$，即 acb 不爲直線反射）之軸。又在上面已證了：移射 acb 之軸爲 c'。故 $f=c'$。即已證明了：f 爲 a,b,c 所成的三邊形之垂足三角形之三邊中對應於邊 c 之邊。

注意：從 $bcafacbf=1$ 可得 $bcaf=fbca$ 故 $acbfbcaf=1$ 成立。因此，$(f)^{bca}=f$ 成立。故 f 爲移射 bca 之軸。現在 $bca=(bv)(vca)=V(q^a)^{-1}=Vq^a$（因如上述 q^a 爲一直線反射之故）。此式表示：bca 之軸亦爲c'。故得 $c'=f$。

另一方面，應用上述的Thomsen的補助定理亦可討論之如下：$1=bcafacbf=bc(afu)(ua)cbf=(bc)(afu)(au)(cbf)=bc(afu)a(ucb)f=bc(afu)(abc)uf$。故得 $(afu)(abc)uf=cb$。又得 $(afu)(abc)(ufa)=cba$，即 $(abc)^{(ufa)}=(abc)^{-1}$。依假定 abc 不爲直線，故依Thomsen的補助定理，ufa 爲一直線，即 f 經過點$U=ua=au$。又從 $bcafacbf=1$ 亦可得 $bcaf=fbca$。故得 $acbfbcaf=1$。從此式，又可得：$bca=fbcaf=fbvvcaf=(fbv)(acv)f$（因 vca 爲一直線）$=(fbv)(acvbbf)=(fbv)(acb)(vbf)$。即 $(acb)^{(vbf)}=bca=(acb)^{-1}$ 成立。因 acb 不爲一直線，依Thomsen的補助定理，vbc 爲一直線。即直線 f 經過點 $V=vb=bv$。因爲直線 f 經過點U和V，故 f 爲 a,b,c 所成的三角形之垂足三角形之一邊 c'。

(21) $vwuc'uwvc'=1$ 且 $(uvw)^2=1$ 成立 $\Longleftrightarrow$ u,v,w 爲一三角形的三角之平分線，又它們爲共點。c'爲此三角形中被 w 平分的角之對邊。

從 $(uvw)^2=uvwuvw=1$可得 $vwuvwu=1$即 $(vwu)^2=1$。故 vwu 爲一直線。設$vwu=d$，則$w=vdu$。此時所給的條件 $vwuc'uwvc'=1$ 可寫成 $dc'dc'=1$ 即 $(c')^d=c'$或$(dc')^2=1$。今設 $(c)^u=b'$。即 $(b')^u=c'$；$(c')^v=a'$，即 $(a')^v=c'$。則 $(a')^w=(a')^{vdu}=((a')^v)^{du}=(c')^{du}=((c')^d)^u=(c')^u=b'$。另一方面，從 $(dc')^2=1$ 可得：$dc'=1$ 即 $d=c'$或 dc' 爲一點，即 $d\perp c'$。從 $(vwu)^2=1$ 可得 (I) v,w,u 爲共點，或(II) v,w,u 爲平行。對於 (I) 之情形，我們可再細分爲下列各種情形：

I_{a_1}：v，w，u 爲共點，$c'\perp d$ 且 $(uc'Z)^2\neq1$，$(vc'Z)^2\neq1$（即 $u\nparallel c'$，$v\nparallel c'$）。我們再把此情形細分如下：

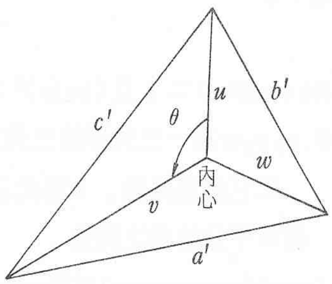
$I_{a_{11}}$：I_{a_1} 之條件之外，還假設 $(uc')(c'v)=uv$ 爲一迴轉角 $\theta>\frac{\pi}{2}$ 之迴轉（第21圖）。

$I_{a_{12}}$：I_{a_1} 之條件之外再加上下列條件：

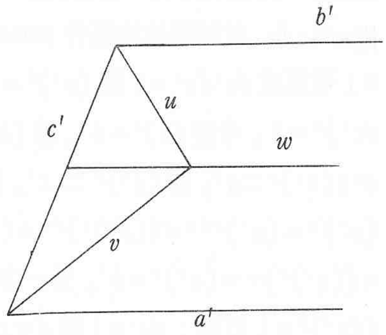
$(uc')=(c'v)=uv$ 爲一點，即 uv 爲一廻轉角 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 之一廻轉。此時 $a'\parallel b'$，即 $(a'b'Z)^2=1$ 成立（第 22 圖）

I_{a13}：I_{a1} 之條件之外再加上下列條件：

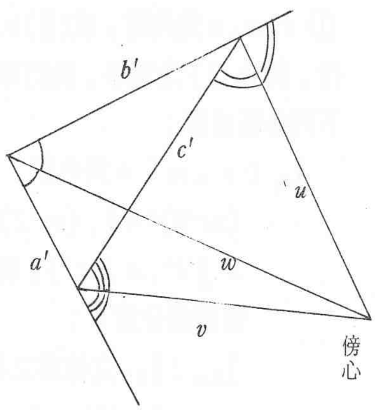
$(uc')(c'v)=uv$ 爲一廻轉角 $\theta<\frac{\pi}{2}$ 之一廻轉。（第 23 圖）。



第21圖



第22圖

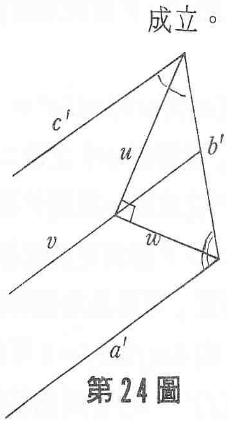


第23圖

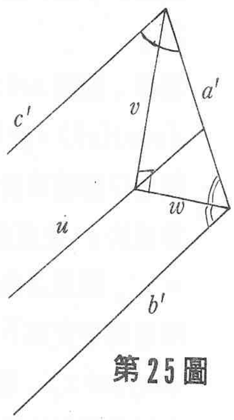
I_{a2}：v,w,u 爲共點，$c'\perp d$ 且 $(uc'Z)^2\neq1$，$(vc'Z)^2=1$ 成立（即 $u\nparallel c'$，$v\parallel c'$）。此時 $a'\parallel c'$（$a'=(c')^v$，$c'\parallel v$）故 $u\perp w$ 即 uw 爲一點反射（第 24 圖）。

I_{a3}：v,w,u 爲共點，$c'\perp d$，且 $(uc'Z)^2=1$，$(vc'Z)^2\neq1$ 成立（即 $u\parallel c'$，$v\nparallel c'$）。此時 $b'\parallel c'$（$b'=(c')^u$，$c'\parallel u$）故 $v\perp w$，即 vw 爲一點反射（第 25 圖）。

I_b：v,w,u 爲共點，且 $d=c'$。此時 $vwu=d=c'$。故 $vw=c'u$ 成立。



第24圖



第25圖

II_a：v,w,u 爲平行，$c'\perp d$。此時 $vwu=d$。故 $vw=du$，$c'=a'=b'$。

II_b：v,w,u 爲平行，$c'=d$。此時 $vwu=c'$。故 $vw=uc'$。

從上面的討論得知：如果加上 $vwu\neq c'$ 的條件，則可除去 I_b 及 II_b 之情形。再加上 $(uvZ)^2\neq1$，$(vwZ)^2\neq1$，$(uwZ)^2\neq1$ 三條件中之任一條件，則可除去 II_a 及 II_b 之情形。再度加上 $(uc'Z)^2\neq1$（或 vw 不爲一點）之條件，則可除去 I_{a_3} 之情形。進一步加上 $(vc'Z)^2\neq1$（或 uw 不爲一點）之條件，則可再除去 I_{a_2} 之情形。如果再進一步加上"uv 不爲一點"之條件，則可除去 $I_{a_{12}}$ 之情形。因此，如果我們加上上述的所有條件，則可得到下述的結論：三直線 a',b',c' 作成一個三角形使其三角的平分線 u，v，w 交於一點。此點爲內心，或爲一傍心。

—本文作者為本所研究員—