(2.張鎮華來函)

編輯先生：

目前見到數播第 26 期徵答問題詳解，其其中 7102 集合問題的解法（第46到49頁），利用圖論來解這個問題，手法實在漂亮。敝人對於最後的兩個註有一些淺見。爲了方便，我們再把原問題敍述一遍。

問題1　設$S=\{1,2,\cdots,n\}$，若$A_1,A_2,\cdots,A_n$為S中n個相異子集，試證存在$x\in S$，使得$A_1\cup\{x\}$，$A_2\cup\{x\}$，$\cdots$，$A_n\cup\{x\}$兩兩相異。

證法甲用數學歸納法，直接了當，但比較複雜。證法乙用圖論定理，簡明可愛。最後兩個註，第一個提出陳其誠先生將問題1推廣成下問題。

問題2　對任意集合T，若$A_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，$i=1,\cdots,n$，表任意$n$個相異向量，其中$a_{ij}\in T$。則存在某個$x\in\{1,2,\cdots,n\}$使得$xA_i\neq xA_j\ \ \forall i\neq j$。其中$xA_i$表示第$x$個向量從$A_i$中除去的新向量。

證明問題2，除了如原解所說，可以用解法甲來做，也可以用解法乙來做，做法完全和原來一樣。

註2提出下面的問題，是問題1的推廣，我們將給一個答案。也可以將問題2同樣推廣，答案也會是一樣。

問題3　設$S=\{1,2,\cdots,n\}$，$1\leqslant k\leqslant n$，定義$f_n(k)=\max\ \{m\mid$任給S中m個相異子集$A_1,\cdots,A_m$，必存在某個$B\subseteq S$，$|B|=k$，使得$A_1\cup B,\cdots,A_n\cup B$仍然互異$\}$。求$f_n(k)=$？

解答　考慮下面$n-k+2$個相異子集$A_0=\phi$，$A_i=\{i\}$，其中$1\leqslant i\leqslant n-k+1$。因為$\bigcup_{i=0}^{n-k+1}A_i$有$n-k+1$個元素，任何$S$的子集$B$若有$k$個元素，必包含某個$1\leqslant i\leqslant n-k+1$的元素$i$，因此$A_0\cup B=A_i\cup B$，這證明$f_n(k)\leqslant n-k+1$。

其次用歸納法證明$f_n(k)\geqslant n-k+1$。$k=1$是問題1，已經證得。若$f_n(k')\geqslant n-k'+1$對$k'<k$成立。對任何$n-k+1$個S的相異子集$A_1,\cdots,A_{n-k+1}$，任取A_{n-k}異於這$n-k+1$個集合，由歸納法假設，存在$B'\subseteq S$，$|B'|=k-1$，使得$A_1'=A_1\cup B'$，$\cdots$，$A_{n-k+1}'=A_{n-k+1}\cup B'$；$A_{n-k}'$

$= A_{n-k} \cup B'$ 兩兩互異。考慮 $S' = S \setminus B'$ 中相異子集 $A_1'' = A_1' \setminus B'$，…，$A_{n-k+1}'' = A_{n-k+1}' \setminus B'$。因為 $|S'| = n-k+1$，由問題 1，可得 $x \in S'$ 使得 $A_1'' \cup \{x\}$，…，$A_{n-k+1}'' \cup \{x\}$ 兩兩相異。則 $B = B' \cup \{x\}$ 滿足 $|B| = k$，而且 $A_1 \cup B = A_1'' \cup \{x\} \cup B'$，…，$A_{n-k+1} \cup B = A_{n-k+1}'' \cup \{x\} \cup B'$ 兩兩相異。所以得證 $f_n(k) \geqslant n-k+1$。

因此 $f_n(k) = n-k+1$ 對於 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都成立。

中央大學數學系　張鎮華　敬上

十一月二十二日