談數學教材的改革與教學評量

高級中學數學課程試用教材試教心得報告

李勝利

高級中學數學課程改進計畫自六十九年秋起至今（七十二）年暑假已在中正預校完成第一梯次的實驗教學，試用教材爲了摒棄美式翻譯版本，全由國內專家學者所編寫，並以平實流暢的語句敍述出處於今日文明社會所需要的數學知識，其精神首推以學生爲中心的教學活動——希望每位學生都能自己看得懂。爲此，教材的編寫皆由實例出發再歸納出結論，代替了以往“數學家”的定義及嚴密的定理證明，每位學生皆可在他們心智成熟的領域裏學習並獲得數學的素養。試用教材經數次修訂後已變得淺顯易學，其基本設想在於減輕學生的負擔，如果我們中學教師硬要把上一代的數學文化加諸於以後使用新教材的學生，那麼將來這些學生必會遭受更大的壓力，譬如，試用教材爲了介紹機率，才在其前面用最通俗粗淺的方法描述了集合概念，連**狄摩根**定理都以圖解說明而已，如果爲了集合而教集合，這豈不踐踏了莘莘學子！

試用教材編得如此淺易，可是我們又要問，只學這些教材夠嗎？足以應付聯考嗎？目前學生的通病不外乎缺乏主動求眞的科學精神，爲了爭取高分，學生們上補習班，要求老師教絕招，加上評量的偏差，學生甚少有成就感可言。這都使我們中學的數學教育脫離了教育的本質。有心人士爲了扭轉乾坤，先是教材的改革，其次是聯考試題的配合，衆所皆知，國內大專聯考試題一向領導著中學教育，因此就算課本編得再理想，如果沒有聯考試題的支持，也將難以收到預期的效果，甚至我們可以說教材改革的成功與否，聯考試題扮演著相當份量的角色。試用教材在本校進行實驗教學，由於不受聯考競爭的影響，因此教學評量不但依據行爲目標分爲認知領域、情意領域、技能領域的評量，同時也兼顧到形成性評量與總結性評量，使得評量結果能促進學生學習慾望，提高其學習興趣，在今「考試影響教學」之評量中，學生經常強調死記而忽略思考、推理應用，爲使聯招試題對於教學與評量能產生良性的影響，筆者以爲有關單位應儘早成立命題技術改進小組，一則引導數學教育正常化，一則催化教材改革的成功。

爲了改進教學評量，提高學生學習興趣，本校的試教活動則遵照編輯教授的指示，儘可

能減少紙筆方式的評量，而多做應用、分析、綜合能力的評量，以提昇評量的層次，今舉出教材中之二例，將試教心得敘述於後，以爲教學評量的參考，並請海內方家不吝指教：

㈠於 ΔABC 中，$\angle ABC=120^\circ$，$\overline{BD}$ 爲 $\angle ABC$ 的分角線，設

$$\overline{AB}=u\ ,\quad \overline{BC}=v\ ,\quad \overline{BD}=w$$

則
$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$$

當筆者正要講解此題目時，有一學生即時問到：如果 $\angle ABC$ 不是 120° 而是任一角，那麼

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$$

的關係是否仍然成立？又

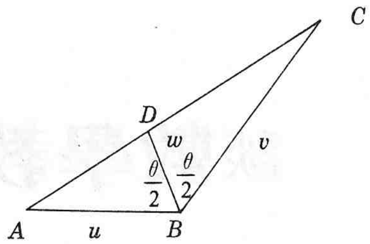
$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$$

代表什麼意義？

本題也是國中比例性質的題目，爲了瞭解學生對本題的解法，筆者並沒有立即回答學生的問題，而改爲隨堂測驗。評量結果發現能證明出來的，不外乎利用比例性質及三角形面積公式，利用比例性質做的，則提示他們利用三角形面積公式再證明一次，以達到三角形面積公式應用的教學標目；而利用三角形面積公式做的，則鼓勵他們將 $\angle ABC$ 換成任一角度 θ，以求證

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$$

是否成立，但因爲 $\sin\theta$ 化不開（參見下面 $\angle ABC$ 爲任一角度 θ 的解法），也就沒有學生能回答出來。這項教學評量，一方面採用所謂標準參照評量，即先訂定學習評量標準（能應用三角形面積公式求解一些問題），學生達成標準即爲及格；另一方面則在激發學生學習倍角公式的動機，這是教學評量中一項極爲重要的目的。對於 $\angle ABC$ 爲任一角度 θ 的情形，等介紹完倍角公式後，大部份的學生都可以解出如下：



設 $\angle ABC=\theta$，因爲面積 $\Delta ABD+\Delta BCD=\Delta ABC$ 利用面積公式，可得

$$\frac{1}{2}uw\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}wv\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{2}uv\sin\theta$$

因爲 $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ 代入上式得

$$\frac{1}{2}uw\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}wv\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{2}uv\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

以 $uv\sin\frac{\theta}{2}$ 同除上式兩端，可得

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

當 $\theta=120^\circ$ 時，即可得

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$$

從 (*) 中，學生們可以看出並非任一角度 θ 時都有 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$ 之結果。至於 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$ 代表什麼意義？這個問題一直到講完平均數，筆者才又把它拿出來討論：

因爲 $\quad \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$

所以 $\quad w=\dfrac{1}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}$

亦即 w 爲 u，v 調和平均數

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)}\right)$$

之半。

依照布魯姆（B.S. Bloom）的學習理論，認知領域可分爲知識、理解、應用、分析、綜合、評鑑等幾個層次，這也是在認知領域評量方面的劃分依據，而目前我們則應致力於評量層次的提昇以期待：「評量結果對於教學是良性的影響」。另外，對於本題我們也可以重新設計以提高其鑑別程度，例如：當 $\angle ABC$ 爲任一角度時，求 $\frac{1}{u}$，$\frac{1}{v}$，$\frac{1}{w}$ 之關係；或當 $\angle ABC = 120^\circ$ 證明 w 爲 u，v 調和平均數之半；或求做一線段恰爲給定兩線段之調和平均數等。除了前述認知領域的評量外，我們在教學時甚少考慮到情意領域和技能領域的評量，就本題而言，我們可以要求學生以尺規畫出圖形（部分學生無法利用尺規畫出 120° 角），再予證明，甚至圖形的精確度也給予一些評量分數，以培養學生審美的另一種情操！

㈡設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，求 $\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta}$ 之最小值

教學評量的目的除了具有前面所提到的積極效果之外，另一項重要的意義在於做教學診斷及補救教學，而學生的「誤解」則是提供訊息的最佳來源。筆者在介紹完不等式後，即以本題測驗學生，事後除了舉出典型的誤解外，並跟學生們一起討論。雖然費時良多，但的確收到了教學相長的效果，茲將討論部分內容列之如下，以供參考：

誤解 1

因爲 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

所以 $\frac{2}{\sin\theta}$ 與 $\frac{3}{\cos\theta}$

均爲正數，利用 $A.M. \geqslant G.M.$ 得

$$\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta} \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}\cdot\frac{3}{\cos\theta}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{12}{\sin 2\theta}} \ (\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

又因爲 $0 < \sin 2\theta < 1$，所以

$$\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta} \geqslant 2\sqrt{\frac{12}{\sin 2\theta}} \geqslant 4\sqrt{3}$$

故所求之最小值爲 $4\sqrt{3}$。

討論：

$$\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta} = 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta} = 2\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}\cdot\frac{3}{\cos\theta}}$$

且 $2\sqrt{\frac{12}{\sin 2\theta}} = 4\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin\theta} = \frac{3}{\cos\theta}$ （$A.M. \geqslant G.M.$ 等號成立之充分必要條件）

且 $\sin 2\theta = 1$

$\Leftrightarrow \tan\theta = \frac{2}{3}$ 且 $\theta = \frac{\pi}{4}$

但 $\tan^{-1}\frac{2}{3} \neq \frac{\pi}{4}$，故 $4\sqrt{3}$ 非 $\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta}$ 之最小值，而僅爲一下限而已。

誤解 2

因爲 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

所以 $\frac{2}{\sin\theta}$ 與 $\frac{3}{\cos\theta}$

均爲正數，利用 $A.M. \geqslant G.M.$ 得

$$\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta} \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}\cdot\frac{3}{\cos\theta}}$$

上式等號成立的充分必要條件爲

$$\frac{2}{\sin\theta} = \frac{3}{\cos\theta}$$

故 $\tan\theta = \frac{2}{3}$

此時 $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

所以 $2\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}\cdot\frac{3}{\cos\theta}} = 2\sqrt{13}$

亦即 $2\sqrt{13}$ 爲所求之最小值。

討論：

令 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

則 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}=5\sqrt{2}$

而 $5\sqrt{2}<2\sqrt{13}$

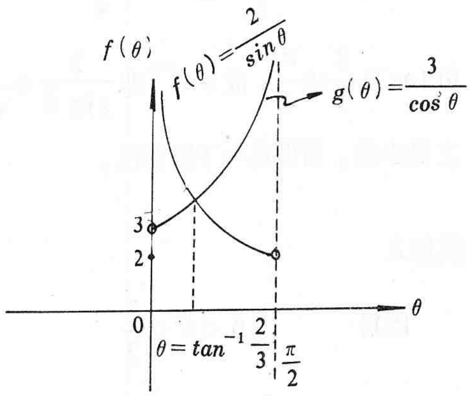
顯然 $2\sqrt{13}$ 非 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}$ 之最小值。

再看 $A.M.\geqslant G.M.$ 之特性，就本題而言，其等號成立之充分必要條件爲

$$\frac{2}{\sin\theta}=\frac{3}{\cos\theta}$$

觀察圖形

$$f(\theta)=\frac{2}{\sin\theta} \quad 與 \quad g(\theta)=\frac{3}{\cos\theta}$$



當 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ 時，兩圖形相交於一點，此時 $f(\theta)=g(\theta)$，自然 $A.M.=G.M.$

但 $f(\theta)$ 與 $g(\theta)$ 疊合後之函數

$$h(\theta)=\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}$$

之最小值却不是發生在 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ 時

誤解3

利用柯西不等式得

$$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{\cos\theta}}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{\sin\theta}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\cos\theta}{3}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant 4 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

上式等號成立之充分必要條件爲

$$\frac{\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}}}{\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{2}}}=\frac{\sqrt{\dfrac{3}{\cos\theta}}}{\sqrt{\dfrac{\cos\theta}{3}}}$$

得 $\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{3}{\cos\theta}$

則 $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$

此時 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}},\quad \cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

則

$$\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}=\sqrt{13}+\sqrt{13}=2\sqrt{13}$$

故所求之最小值爲 $2\sqrt{13}$

討論：

當 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 時，同誤解2之討論，顯然 $2\sqrt{13}$ 非所求之最小值。

今從向量的觀點來看柯西不等式

設 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$

$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$

爲任意兩向量，則

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\geqslant|\vec{a}\cdot\vec{b}|$$

且等號成立之充分必要條件爲 $\vec{a}\parallel\vec{b}$

令 $\vec{a}=\left(\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}},\ \sqrt{\dfrac{3}{\cos\theta}}\right)$

$\vec{b}=\left(\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{2}},\ \sqrt{\dfrac{\cos\theta}{3}}\right)$

當 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ 時，

$$\vec{a}=(\sqrt[4]{13},\ \sqrt[4]{13})$$

$$\vec{b}=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{13}},\ \frac{1}{\sqrt[4]{13}}\right)$$

顯然 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，因此①式之等號成立，可是

$$\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}$$

之最小值却不是發生在 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ 時。

從上面的討論中得知：雖然可以某些量$\vec{b}$與$\vec{a}$構成一柯西不等式$|\vec{a}||\vec{b}|\geq|\vec{a}\cdot\vec{b}|$，並在$\vec{b}$平行$\vec{a}$時求得等號成立之充分必要條件。但是並非每一個與$\vec{a}$平行的向量$\vec{b}$在柯西不等式中等號成立時（某一個角度），都可以使得

$$|\vec{a}|^2=\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}$$

爲最小值。換句話說，必需在某一條件下所找到的$\vec{b}$才能利用柯西不等式求得$|\vec{a}|^2$之最小值，此條件對正弦、餘弦函數而言是平方關係：

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

另一方面，如果令

$$\cos\theta=x,\quad \sin\theta=y$$

則本題變成：「已知$0<x<1$，$0<y<1$，x，$y\in R$，且$x^2+y^2=1$，試求$\frac{2}{y}+\frac{3}{x}$之最小值」。對於這種類型的題目，學生們在學柯西不等式時也練習了不少，只不過本題改變一形式用正弦、餘弦函數表示而已，可是學生們却忘記了平方關係：

$$x^2+y^2=1\ (\cos^2\theta+\sin^2\theta=1)$$

本題是在「不等式」單元結束後所實施的總結性評量，但學生成就水準却無法達到預期的學習目標（能利用柯西不等式求極值），因此必需進行補救教學，在檢討本題時，筆者也隨時做形成性評量，即在學習過程中採各種方法評量學生之學習效果，以便回饋。筆者願與同仁們共勉的是：「評量是隨時在進行的」。如此，即可於教學過程中或平時發現學習的困難因素，以改進教學和學習的方法。

下面是實驗學生班學生經評量、討論後對本題的做法之一：

因爲 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

利用柯西不等式得

$$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{\cos\theta}}\right)^2\right]$$

$$\left[\left(\sqrt{\frac{\sin^5\theta}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\cos^5\theta}{3}}\right)^2\right]$$

$$\geq(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=1$$

上式等號成立之充分必要條件爲

$$\frac{\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}}}{\sqrt{\dfrac{\sin^5\theta}{2}}}=\frac{\sqrt{\dfrac{3}{\cos\theta}}}{\sqrt{\dfrac{\cos^5\theta}{3}}}$$

但 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

所以 $\frac{2}{\sin^3\theta}=\frac{3}{\cos^3\theta}$

則 $\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

此時 $\sin\theta=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}}}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}}}$

故 $\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}$

$$=\frac{2\sqrt{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}}+\frac{3\sqrt{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})^3}$$

因此所求之最小值爲$\sqrt{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})^3}$

然而部份學生對於

$$「\left(\sqrt{\frac{\sin^5\theta}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\cos^5\theta}{3}}\right)^2」$$

的引入仍然覺得很牽強。最後，在一次實驗課程的研討會上，同學們再度請教編輯教授如下：

設 a，$b>0$

因爲 $a\sin\theta+b\cos\theta$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+x)\cdots\cdots①$$

其中 $\tan x=\frac{b}{a}$

所以 $\sqrt{a^2+b^2}$

$$\geq a\sin\theta+b\cos\theta\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

又

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

因而 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}>0$

②式兩端同乘以 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}$ 得

$$\left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\geqslant\left[\left(\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{\cos\theta}}\right)^2\right]\cdot$$

$$\left[\left(\sqrt{a\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{b\cos\theta}\right)^2\right]$$

$$\cdots\cdots③$$

但由柯西不等式知

$$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{\cos\theta}}\right)^2\right]\cdot$$

$$\left[\left(\sqrt{a\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{b\cos\theta}\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left(\sqrt{2a}+\sqrt{3b}\right)^2 \quad\cdots\cdots④$$

由③，④得

$$\left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\geqslant\left[\left(\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{\cos\theta}}\right)^2\right]\cdot$$

$$\left[\left(\sqrt{a\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{b\cos\theta}\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left(\sqrt{2a}+\sqrt{3b}\right)^2 \quad\cdots\cdots⑤$$

而③式（或②式）等號成立之充分必要條件為

$$\sin(\theta+x)=1$$

得 $\tan\theta=\cot x$

即 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{a}{b}$ $\cdots\cdots$(A)

又④式等號成立之充分必要條件為

$$\frac{\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}}}{\sqrt{a\sin\theta}}=\frac{\sqrt{\dfrac{3}{\cos\theta}}}{\sqrt{b\cos\theta}}$$

得 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ $\cdots\cdots$(B)

因此⑤式等號成立的條件為(A)與(B)同時成立

故 $\dfrac{a}{b}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

或

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \quad\cdots\cdots(C)$$

當⑤式等號成立時，以 $\sqrt{a^2+b^2}$ 除之

得 $\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{3}{\cos\theta}$ 之最小值為

$$\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}=\frac{\left(\sqrt{2a}+\sqrt{3b}\right)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

由(C)令

$a=\sqrt[3]{2}\,k$， $b=\sqrt[3]{3}\,k$， $k>0$

代入上式整理之，得最小值為

$$\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}\right)^3}$$

結語：

試用教材經三年多的實驗教學與修訂並且集思廣益，即將於七十三學年度推出，教學方法的改進刻不容緩，而想改進教學方法則必須配合改進有效的評量方式與命題技術，唯有客觀的評量才能了解學習的眞正結果，據此才能改進教學方法，並提高學習興趣。

參考資料

三角演題正誤解　羅添壽　數學傳播一卷一期

如何改進教學評量　郭生玉教授　72. 8. 于中正預校。

—本文作者現任教於中正預校—