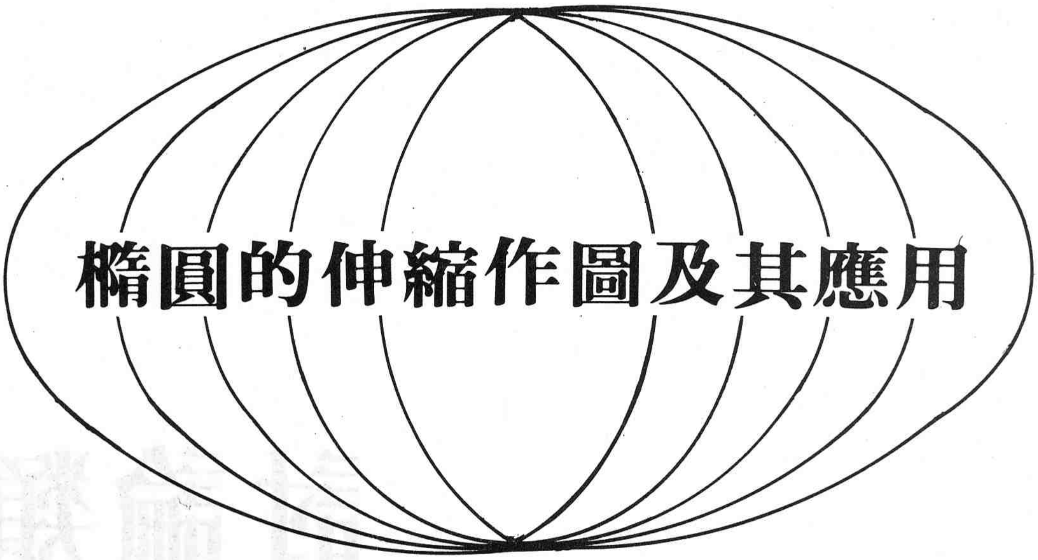


橢圓的伸縮作圖及其應用

葉東進

橢圓的伸縮作圖

考慮平面上的圓 $x^2+y^2=b^2$ ，$b>0$ ；如果將圓上的點 $p=(x,y)$ 按 x 軸的方向移動到點 $p'=(\frac{a}{b}x, y)$， 其中 $a>b>0$ ；那麽當 p 沿着圓掃過一周時，對應的 p' 便跟着掃出了整個橢圓：

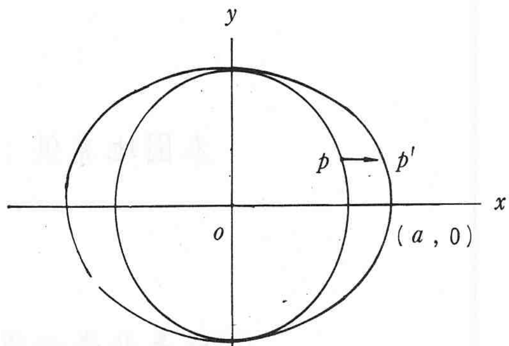
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

從映射的觀點來看，平面上的點 (x, y) 對應到點 $(\frac{a}{b}x, y)$，其實是一個綫性映射，記爲 f，

即 $f(x, y)=(\frac{a}{b}x, y)$

或是 $f=\begin{pmatrix}\frac{a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

映射 f 不僅使得圓 $x^2+y^2=b^2$ 映至橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；由於 $\det f=\frac{a}{b}$ $(\neq 0)$，因此



f 是一個 $\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ 的對射， 從而存在反映射 f^{-1} 。

顯然， $f^{-1}(x, y)=(\frac{b}{a}x, y)$

或是 $f^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{b}{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

當然，f^{-1} 使得橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 映至圓 $x^2+y^2=b^2$ 。

根據 f 是一個 $\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ 的綫性對射 ，知道 f 具有下列的性質：

性質一：任一直綫 L 通過映射 f 所得的映像

$f(L)$ 仍是一直線；而一個三角形的映像也仍然是一個三角形。

性質二： 任意共綫的三點 A, B, C 與它們通過映射 f 的像點 A', B', C' 之間滿足：
$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$
特別是如果 B 是 AC 的中點，那麼 B' 也是 $A'C'$ 的中點。

性質三： 如果兩條曲綫 Γ_1 與 Γ_2 有唯一的交點，那麼映像 $f(\Gamma_1)$ 與 $f(\Gamma_2)$ 也有唯一的交點。特別是如果直綫 L 是 Γ 的切綫，那麼 $f(L)$ 也是 $f(\Gamma)$ 的切綫。

性質四： 假定直綫 L 的方程式是 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$，那麼直綫 $f(L)$ 的方程式便是
$\frac{b}{a}\alpha x+\beta y+\gamma=0$，因此

$f(L)$ 的斜率 $=\frac{b}{a}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{b}{a}$ 乘以 L 的斜率，也等於說

L 的斜率 $=\frac{a}{b}$ 乘以 $f(L)$ 的斜率。

所以有：
(i) 原點 $0 \in L \iff 0 \in f(L)$
(ii) 對於任兩直綫 L_1 與 L_2 有：
$L_1 /\!/ L_2 \iff f(L_1) /\!/ f(L_2)$

性質五： 任一圓 C 通過映射 f 的映像 $f(C)$ 是一個橢圓。

說明： 取 $C \equiv x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$

則 $f(C) \equiv \left(\frac{b}{a}x\right)^2+y^2+\alpha\left(\frac{b}{a}x\right)+\beta y+\gamma=0$，

或是
$b^2x^2+a^2y^2+\alpha abx+\beta a^2y+\gamma a^2=0$

性質六： 區域 ω 及其映像 $f(\omega)$，兩者的面積有

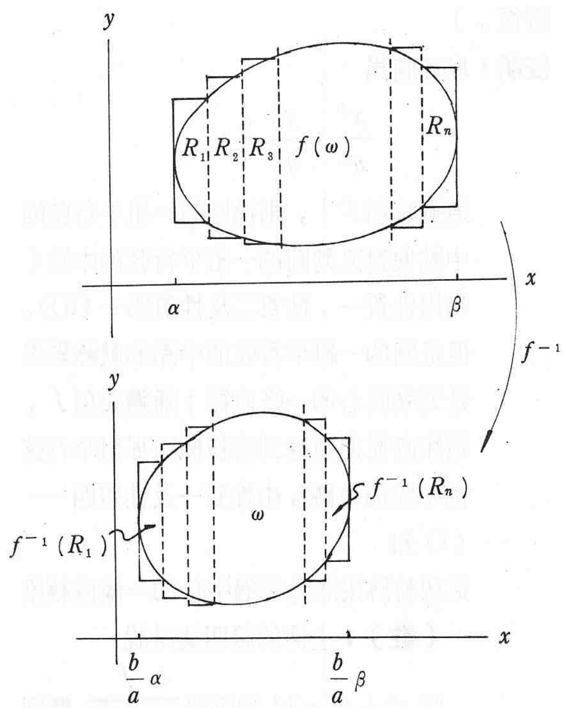
$$\frac{\text{area } f(\omega)}{\text{area } \omega}=\frac{a}{b}$$

特別是圓 $x^2+y^2=b^2$ 的面積是 πb^2，因此橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面積便是

$\frac{a}{b}\cdot \pi b^2=\pi ab$

說明： 假定區域 $f(\omega)$ 位於區間〔α，β〕內，那麼區域 ω 便位於區間〔$\frac{b}{a}\alpha$，$\frac{b}{a}\beta$〕內，而且兩者同高。

隨意取一組以 $\frac{\beta-\alpha}{n}$ 爲底 $(n \in N)$ 的矩形 $R_1, R_2, \cdots, R_n$，它們外接於 $f(\omega)$，並且它們的面積和 S_n 是 $f(\omega)$ 的面積的一個右近似；通過映射 f^{-1}，則
$f^{-1}(R_1), f^{-1}(R_2), \cdots, f^{-1}(R_n)$
是一組以 $\frac{b}{a}\cdot\frac{\beta-\alpha}{n}$ 爲底而高度則分別相同於 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 的高度的矩形；它們外接於 ω，並且它們的面



積和T_n是ω的面積的一個右近似，

其中　$T_n=\dfrac{b}{a}S_n$。

即
$$\begin{cases}\text{area } f(\omega)=\lim S_n\\ \text{area } \omega=\lim T_n\\ \qquad\quad=\lim \dfrac{b}{a}S_n\end{cases}$$

因此，
$$\frac{\text{area } f(\omega)}{\text{area } \omega}=\frac{a}{b}$$

應　　用

(註)：底下的問題，涉及到的映射f若無特別指明，一律指
$$f=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}。$$

例1　橢圓的任一組平行弦的中點的軌跡是通過中心的一條直線段。(這樣的直線段我們通常稱它是由這一組平行弦所產生的橢圓的一條直徑。)

證明：取橢圓為
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1，$$

通過映射f^{-1}，則橢圓的一組平行弦的中點便對應到圓的一組平行弦的中點(利用性質一，性質二及性質四—(ii))。但是圓的一組平行弦的中點的軌跡顯然是通過圓心的一條直徑；通過映射f，這條直徑便對應到當初橢圓那組平行弦的中點的軌跡。由性質一及性質四——(i)知

這個軌跡果然是通過中心的一條直線段

(註)：上面的證明便是說

圓$x^2+y^2=b^2$的直徑$\underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}}$橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的直徑。

例2　如果橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的一組平行弦的斜率為$m$，則該組平行弦所產生的直徑的方程式為$b^2x+a^2my=0$。

證明：通過映射f^{-1}，斜率為m的橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的平行弦便對應到斜率為$\dfrac{a}{b}m$的圓$x^2+y^2=b^2$的平行弦，這樣的平行弦所產生的圓的直徑是
$$y=-\frac{b}{am}x\quad(因為直徑與弦垂直)，$$
或是
$$bx+amy=0$$
將這個直徑通過映射f便得橢圓的直徑，由性質四知其方程式為
$$\frac{b}{a}\cdot bx+amy=0$$
或是
$$b^2x+a^2my=0$$

例3　橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$外一點$P_0=(x_0，y_0)$到橢圓的兩個切點$A$與$B$的連線(稱作是$P_0$關於橢圓的極線)的方程式是
$$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$$

證明：取　$f^{-1}(P_0)=P_0'$，$f^{-1}(A)=A'$及$f^{-1}(B)=B'$

由性質三知：

$P_0'A'$，$P_0'B'$是P_0'到圓$x^2+y^2=b^2$的兩條切線，經由簡易的運算得出直線$A'B'$的方程式是　$\dfrac{b}{a}x_0x+y_0y=b^2$

但是，直線$AB\equiv f$(直線$A'B'$)，因此，由性質四知

AB的方程式是

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}x_0x+y_0y=b^2\ ,$$

或是

$$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$$

例４　直綫 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 與橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相切的條件是：

$$\gamma^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2$$

証明： 通過映射 f 與 f^{-1} 來看。

直綫 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 與橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相切等價於

直綫 $\dfrac{a}{b}\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 與圓 $x^2+y^2=b^2$ 相切。

因此，所求條件便是圓心到切綫的距離等於圓的半徑，即是

$$\frac{|\gamma|}{\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}\alpha^2+\beta^2}}=b\ ,$$

或是

$$\gamma^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2$$

例５　已知橢圓 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的一弦的中點是（1，−2），試求包含該弦的直綫的方程式。

解：

取　$f=\begin{pmatrix}\frac{6}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，

又令欲求之直綫爲 L，

設　$f(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(1,-2)$

得　$(x,y)=(\frac{1}{2},-2)$

因爲以 $(\frac{1}{2},-2)$ 爲中點的圓 $x^2+y^2=9$ 的弦的直綫 ℓ 是

$$\frac{1}{2}x-2y-\frac{17}{4}=0$$

$$\therefore\ L=f(\ell)\equiv\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x-2y-\frac{17}{4}=0\ ,$$

或是

$$x-8y-17=0$$

以上的例子，有個共同的處理原則：

通過映射 f^{-1}，把有關橢圓問題的已知資料轉化爲有關圓問題的資料，利用圓這個比較容易處理的對象，從圓的已知資料去獲得有關圓的結論；之後，再通過映射 f，把有關圓的結論還原爲有關橢圓的結論。

要是把圓喻爲“簡”，橢圓喻爲“繁”，那麽上面說的正是“以簡御繁”。

底下再舉兩個例子。

例６　兩個橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

與　$\Gamma':\dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}=1$

若是滿足 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$，則此兩橢圓相似（即：過中心 O 的任一直綫要是分別交 Γ，Γ' 於點 A，A'，則有 $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}=\dfrac{a}{a'}$（常數））。

証明：

取　$f=\begin{pmatrix}\frac{a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 及 $f'=\begin{pmatrix}\frac{a'}{b'} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

由於 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$，知 $f\equiv f'$，因此便有

$$f^{-1}(A)\in f^{-1}(\Gamma)\equiv x^2+y^2=b^2$$

及

$$f^{-1}(A')\in f^{-1}(\Gamma')\equiv x^2+y^2=b'^2$$

由性質二，即知

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{Of^{-1}(A)}}{\overline{Of^{-1}(A')}}=\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$$

例７　求橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的內接 n 邊形的最

大面積。

解：設 P_n 表橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的內接 n 邊形通過映射 f^{-1}，知

$f^{-1}(P_n)$ 是圓 $x^2+y^2=b^2$ 的內接 n 邊形，且由性質六知

P_n 的面積 $=\frac{a}{b}$ 乘以 $f^{-1}(P_n)$ 的面積

但是，當 $f^{-1}(P_n)$ 是一個正 n 邊形時，

$f^{-1}(P_n)$ 有最大面積 $\frac{n}{2}b^2\sin\frac{2\pi}{n}$，因此

$$P_n\text{ 的最大面積}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{2}b^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$=\frac{n}{2}ab\sin\frac{2\pi}{n}$$

（注意：當 $n\to\infty$ 時，

$$P_n=\pi ab\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\to\pi ab\ )$$

特別是

P_3 的最大面積是

$$\frac{3}{2}ab\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$

P_4 的最大面積是

$$\frac{4}{2}ab\sin\frac{2\pi}{4}=2ab$$

即是說，橢圓 $\frac{x_2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的內接三角形與內接四邊形的最大面積分別是

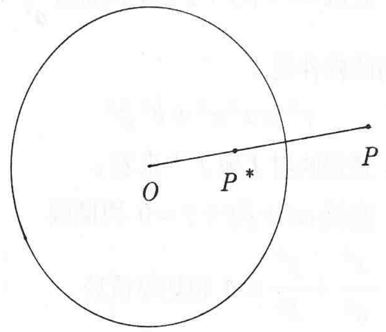
$$\frac{3\sqrt{3}}{4}ab\quad\text{與}\quad 2ab$$

橢圓的鏡射

立在一個橢圓形的鏡子前，一個物體到底會呈現出怎樣的鏡像？

若是想獨立地回答這個問題恐怕不是容易的事；要是通過前述的綫性映射 f 及圓的鏡射便能反映出橢圓的鏡射這回事來。

先談圓的鏡射。



考慮平面上，以 O 爲圓心的已知圓 $x^2+y^2=b^2$。

對於任一點 P，在射綫 OP 上取點 P^* 使滿足

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP^*}=b^2$$

（這樣的 P^* 點顯然是相對於 P 的唯一存在。）

點 P^* 稱作是點 P 關於圓 $x^2+y^2=b^2$ 的鏡像。

（這其實也是說 P 是 P^* 的鏡像），而稱 P 與 P^* 之間的這種對應是圓 $x^2+y^2=b^2$ 的鏡射。

如果取 $P=(x, y)$，且

令 $\overrightarrow{OP^*}=\lambda\overrightarrow{OP}=\lambda(x, y)$，其中 $\lambda>0$

由 $\overline{OP}\cdot\overline{OP^*}=b^2$

$$\Rightarrow\quad\lambda=\frac{b^2}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\quad P^*=\left(\frac{b^2x}{x^2+y^2},\frac{b^2y}{x^2+y^2}\right)$$

因此，圓 $x^2+y^2=b^2$ 的鏡射 c 便是：

$$c:(x, y)\to\left(\frac{b^2x}{x^2+y^2},\frac{b^2y}{x^2+y^2}\right)$$

這其實也是說：

$$c^{-1}:(x, y)\to\left(\frac{b^2x}{x^2+y^2},\frac{b^2y}{x^2+y^2}\right)。$$

現在來考慮方程式$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$所表曲綫Γ（若$A=0$，Γ是一直綫；若$A\neq 0$，則Γ是一個圓（註））在圓$x^2+y^2=b^2$的鏡射下會呈現出什麽樣的鏡像$c(\Gamma)$？

取$(x,y)\in c(\Gamma)$

$\therefore$ $\left(\dfrac{b^2x}{x^2+y^2},\dfrac{b^2y}{x^2+y^2}\right)\in\Gamma$，因而滿足$\Gamma$的方程式：

$$A\left(\left(\frac{b^2x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{b^2y}{x^2+y^2}\right)^2\right)+B\frac{b^2x}{x^2+y^2}+C\frac{b^2y}{x^2+y^2}+D=0,$$

或是

$$c(\Gamma)\equiv D(x^2+y^2)+Bb^2x+Cb^2y+Ab^4=0$$

於是得到下面的結論：

(i) Γ是經過O點的直綫（$A=D=0$ 的時候）$<=>$ $c(\Gamma)$是經過O點的直綫。
此時 $c(\Gamma)\equiv\Gamma$

(ii) Γ是不經過O點的直綫（$A=0$而$D\neq 0$的時候）$<=>$ $c(\Gamma)$是經過O點的一個圓。

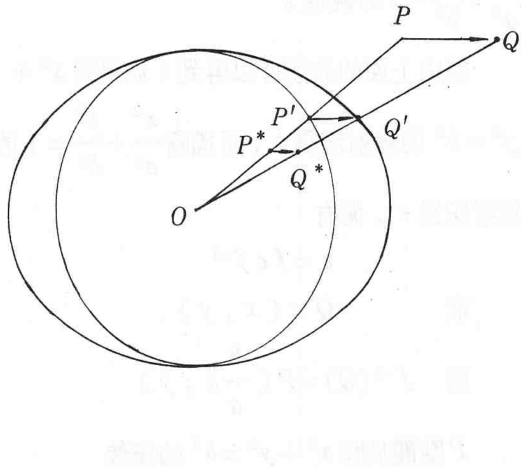
(iii) Γ是不經過O點的圓（$AD\neq 0$的時候）$<=>$ $c(\Gamma)$是不經過O點的圓。
此時 $c(\Gamma)\neq\Gamma$

接着可以來談橢圓的鏡射了。

我們可以想像綫性映射

$$f=\begin{pmatrix}\frac{a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

是平面上的一個伸縮變形，任何一點(x,y)通過f便伸縮到點$\left(\frac{a}{b}x,y\right)$，而圓$x^2+y^2=b^2$ 通過f變形爲橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；總之，除了$y$軸上的點，所有的點與任何的圖形通過$f$都將伸縮變形爲其他的點與不同的圖形。因此，我們可以再想像：已如前述的一點立於一個圓形的鏡子前所呈現的鏡像的事實，要是通過f的伸縮變形將會有怎樣的結果發生呢？



我們試着用上面的圖來解說：

假定P點關於圓$x^2+y^2=b^2$ 的鏡像是P^*，通過映射f，取$f(P)=Q$，$f(P^*)=Q^*$此時f(圓)$\equiv$橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，便將$Q^*$稱作是點$Q$關於橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的鏡像；而點$Q$與$Q^*$之間的這種對應便稱作是橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的鏡射。

連接OP交圓於點P'，取$f(P')=Q'$，則Q'落在橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上，也落在射綫$OQ$上。

由於

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP^*}=b^2=\overline{OP'}^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}}=\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP^*}}$$

利用性質二，知

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OQ'}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}}\quad 且\quad \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ^*}}=\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP^*}}$$

故有

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OQ'}}=\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ^*}}$$

或是 $\overline{OQ}\cdot\overline{OQ^*}=\overline{OQ'}^2$

換句話說，予以點 Q，連接射綫 OQ，交橢圓於點 Q'，在射綫 OQ 上取點 Q^* 使滿足

$$\overline{OQ}\cdot\overline{OQ^*}=\overline{OQ'}^2$$

這樣的 Q^* 便稱作是 Q 點關於橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的鏡像。

經由上面的敍述可以得到：如果圓 $x^2+y^2=b^2$ 的鏡射記爲 c，而橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的鏡射記爲 e，便有

$$e=fcf^{-1}$$

取 $Q=(x, y)$，

則 $f^{-1}(Q)=P(\dfrac{b}{a}x, y)$

P 點關於圓 $x^2+y^2=b^2$ 的鏡像

$$P^*=c(P)$$

$$=\left(\frac{b^2\cdot\frac{b}{a}x}{\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2}, \frac{b^2y}{\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2}\right)$$

$$=\left(\frac{ab^3x}{b^2x^2+a^2y^2}, \frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}\right)$$

$$\therefore\ Q^*=e(Q)=fcf^{-1}(Q)$$

$$=fc(P)=f(P^*)$$

$$=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{ab^3x}{b^2x^2+a^2y^2}, \frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2b^2x}{b^2x^2+a^2y^2}, \frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}\right)$$

因此，橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的鏡射就是：

$$e:(x, y)\to$$

$$a^2b^2\left(\frac{x}{b^2x^2+a^2y^2}, \frac{y}{b^2x^2+a^2y^2}\right)$$

接着運用前面已經提過圓的鏡射的三個結論來看看橢圓的鏡射會有什麼結果？

(i) Γ 是經過 O 點的直綫

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\Gamma)$ 是經過 O 點的直綫

$\Leftrightarrow$ $cf^{-1}(\Gamma)$ 是經過 O 點的直綫，

此時 $cf^{-1}(\Gamma)\equiv f^{-1}(\Gamma)$

由 $e=fcf^{-1}$ 知

$e(\Gamma)\equiv fcf^{-1}(\Gamma)\equiv\Gamma$

因此，

Γ 是經過 O 點的直綫

$\Leftrightarrow$ $e(\Gamma)$ 是經過 O 點的直綫

此時， $e(\Gamma)\equiv\Gamma$

(ii) Γ 是不經過 O 點的直綫

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\Gamma)$ 是不經過 O 點的直綫

$\Leftrightarrow$ $cf^{-1}(\Gamma)$ 是經過 O 點的一個圓

$\Leftrightarrow$ $e(\Gamma)\equiv fcf^{-1}(\Gamma)$ 是經過 O 點的一個橢圓

(iii) Γ 是不經過 O 點的橢圓

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\Gamma)$ 是不經過 O 點的圓

$\Leftrightarrow$ $cf^{-1}(\Gamma)$ 是不經過 O 點的圓

（此時 $cf^{-1}(\Gamma)\not\equiv f^{-1}(\Gamma)$）

$\Leftrightarrow$ $e(\Gamma)\equiv fcf^{-1}(\Gamma)$ 是不經過 O 點的一個橢圓

（此時 $e(\Gamma)\not\equiv\Gamma$）

註：當然，這時應該附加一個條件

$$B^2+C^2>4AD$$

—本文作者現任教於私立曉明女中—