以反射計算爲工具討論平面幾何(I)

許振榮

在平面幾何中，我們知道幾何變換的概念除了在作圖上很有用外，還可以用來證明定理和建立幾何的基礎。最先把反射計算應用在絕對幾何基礎上的是 J. Hjelmslev ，接著 G. Thomsen 繼承了這個思想，進一步用到歐氏幾何的基礎建立上。後來，A. Schmidt, F. Bachmann, E. Sperner, K. Schütte, H. Toepken, S。Guse 等人也在這方面有貢獻。十年前，筆者在淡江大學演講，介紹了導論的一部分。有學生把他的筆記發表在淡江大學的一刊物上。最近筆者找到當時的演講原稿，由於看到淡江刊物者可能不多，所以決定把舊稿重新整理，這一篇導論就是增補內容後而寫成的。有關參考的主要文獻如下：

(1) Thomsen, G : Über einen neuer Zweig geometrischer Axiomatik unt eine neue Art Von analytischen Geometrie. Math. Z. 34(1932) 668-720.

(2) Thomsen, G : The treament of elementary geometry by a group-calculus. The Mathematical Gazette. 17(1933) 230-242.

(3) Bachmann, F : Axiomatischen Aufbau der ebenen absoluten Geometrie. The axiomatic method, edited by L. Henkin, P。Suppes, A. Tarski. Studies in Logic, Amesterdam (1959) 114-126.

(4) Bachmann, F : Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 96. Berlin/Götingen/Heidelberg. 1959.

爲了簡便起見，我們把討論範圍侷限於歐氏平面幾何 (Euclidean plane geometry) 。內容之概要爲

(i) 歐氏平面上運動群 (等長變換群) 的性質；

(ii) 以反射關係來表示平面幾何的性質；

(iii) 使用反射計算來證明幾何定理；

(iv) 歐氏平面幾何之基礎建設的公理系。

§1 歐式平面上的各種等長變換及其所構成的羣

如我們所知，歐氏幾何是探討在等長變換群下不變的性質和不變量的幾何之一分枝。此處等長變換不僅保存線分長度的寫像，也保存角之角度，並把直線變換爲直線。如上面所說我們的討論僅侷限於平面上的等長變換群。

設α爲任一等長變換。在變換α下點A之像點A'以$A\alpha=A'$表之。又直線a之像直線a'以$a\alpha=a'$表之。如果α，β爲二個等長變換，它們的積$\alpha\beta$爲把點A變至$(A\alpha)\beta$的變換，即$A(\alpha\beta)=(A\alpha)\beta$。即對於點$A$先施行變換$\alpha$，然後再施行$\beta$於點$A\alpha$，可得對於點$A$施行變換$\alpha\beta$所得的點$A(\alpha\beta)$。設1表示恒等變換，$\alpha^{-1}$表示變換$\alpha$的逆變換。如所熟知$\alpha\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=1$成立。又對於3個等長變換$\alpha$，$\beta$，$\gamma$之積有$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$之關係成立。又如果對於等長變換$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_m$，$\beta_1$，$\beta_2$，…，$\beta_n$有$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m=\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$之關係成立，對於任何等長變換$\gamma$和$\delta$，有

$$\gamma(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)=\gamma(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)$$

和

$$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\delta=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)\delta$$

之關係成立。

關於一直線a的**直線反射**（line reflection）爲使直線a上的各點不變的等長變換，而如果P爲平面上不在直線a上的任一點，則其像點P'與點P關於直線a成對稱，即a爲線段PP'之垂直平分線。

現在我們來考慮二個直線反射的積。設f，g爲關於直線f和g的二個直線反射。如果$f=g$，則$f^2=1$而$f\neq 1$。一般而言，滿足$\alpha^2=1$且$\alpha\neq 1$的變換稱爲**對合的變換**。故**直線反射爲一個對合的變換**。

其次假設$f\neq g$且$f\parallel g$成立。此時設v爲一與f，g垂直的直線，又設其與直線f，g之交點分別爲F，G。設P爲任一點，P'爲在此變換fg下P之像點，則$\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{FG}$恒成立。此處$\overrightarrow{PP'}$表示從點$P$至點$P'$的向量。因此，變換$fg$爲一平移（translation）。此平移可以向量$2\overrightarrow{FG}$表之。今設f'，g'爲與f，g平行之二直線，直線v與f'，g'之交點分別爲F'，G'。如果F，G，F'，G'滿足$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{F'G'}$，則$fg$，$f'g'$二平移均可表成$2\overrightarrow{FG}=2\overrightarrow{F'G'}$，因此$fg$，$f'g'$爲同一平移，即$fg=f'g'$。現在假設$f$，$g$，$h$爲互相平行之三直線，則關於此三直線的直線反射之積亦爲一直線反射。此因可求得一直線k使$fg=kh$成立，因之$fgh=k$成立之故。顯然此直線k亦與直線f，g，h平行。其次考慮二個平移，其平移方向相同者。設ab和cd爲如此二平移，它們分別由向量$2\overrightarrow{AB}$和$2\overrightarrow{CD}$所表示。我們可得一直線e使$cd=be$成立。設e與直線$\overleftrightarrow{AB}$之交點爲E，則cd亦可被$2\overrightarrow{BE}$表之。此時

$$(ab)(cd)=(ab)(be)=ae,$$

而ae爲被$2\overrightarrow{AE}$所表示的平移。因

$$2\overrightarrow{AE}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$$

，故$(ab)(cd)$爲由向量$2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$所表示的平移。由上述亦可知：如果$\tau\neq 1$爲一平移，則$\tau^2\neq 1$亦爲一平移。

現在假設$f\neq g$且$f\nparallel g$。此時二直線f，g相交。設其交點爲S，則S在fg之下不變。又設f，g所成的交角爲θ。如果P爲平面上S以外的任一點，P在變換fg下之像點爲P'，則$\angle PSP'=2\theta$。故fg爲以S爲廻轉中心的角度2θ之廻轉（rotation）。設f'，g'亦爲經過點S之二直線，且其交角亦爲θ，即$\measuredangle(f',g')=\theta$，則$fg$和$f'g'$均表示以$S$爲廻轉中心，廻轉角爲$2\theta$之廻轉，故可以$fg=f'g'$表之。現在假設$f$，$g$，$h$爲經過$S$之三直線，則關於此三直線的三直線反射之積$fgh$亦爲一直線反射。此因，可求得一直線$k$使$fg=kh$成立。故

$$(fg)h=(kh)h$$

，即$fgh=k$成立之故。顯然此直線k亦經過點S。現在考慮二個廻轉，其廻轉中心相同者。設二廻轉ab和cd的廻轉中心俱爲點S。設ab之廻轉角爲2θ，cd之廻轉角爲2φ。我

們可得一直線 e 使 $cd = be$ 成立。此時

$$(ab)(cd) = (ab)(be) = ae$$

因爲

$$\measuredangle(a, e) = \theta + \varphi$$

$(ab)(cd)$ 爲以 S 爲迴轉中心，迴轉角爲 $2(\theta+\varphi)$ 的迴轉。由上述可知：如果 α 爲以 S 爲迴轉中心，迴轉角爲 2θ 的迴轉，則 α^2 爲以 S 爲迴轉中心，迴轉角爲 4θ 之迴轉。

由上面的討論得知：關於二個相異直線的直線反射之積必爲一平移或爲一迴轉。

我們現在來考慮二直線 f，g 之交角爲 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的特別情形。此時 $f \perp g$。由上述 fg 爲以 S（f，g 之交點）爲迴轉中心，迴轉角爲 $2\theta = \pi$ 之迴轉。此迴轉即爲半繞迴轉。在此迴轉之下，S 爲唯一的不變點。如果點 P 不是點 S，即 $P \neq S$，則 P 之像點 P' 爲關於點 S 的 P 的對稱點。即 P，S，P' 在一直線上，而且 $PS = SP'$ 成立。如此的變換稱爲關於點 S 的**點反射**（Point reflection）。今後亦以 S 表之。顯然 $S^2 = 1$ 且 $S \neq 1$ 成立。故**點反射 S 亦爲一個對合的變換**。由上述得知：**當 $f \perp g$ 時**，如果 S 爲 f，g 之交點，則 $S = fg$ 成立。又因 $S^2 = fg\,fg = 1$，**亦可得 $S = fg = gf$**。反之，如果對於二個相異的直線反射 f，g（$f \neq g$），$fg = gf$ **成立**，則可得 $fg\,fg = (fg)^2 = 1$。假設 $fg \neq 1$ 爲一平移，則 $(fg)^2$ 亦爲不等於 1 之平移，即 $(fg)^2 \neq 1$。故 fg 不能爲一平移。故依上述必爲一迴轉。設其迴轉中心爲 S，則 f，g 交於點 S。因爲 $(fg)^2 = 1$，$(fg)^2$ 爲以 S 爲迴轉中心，迴轉角爲 2π 的迴轉。因之 fg 爲以 S 爲迴轉中心，迴轉角爲 π 之迴轉。故二直線 f，g 之交角爲 $\frac{\pi}{2}$，**即 f，g 直交於點 S**。

很容易得知：二個相異的點反射之積爲一平移。因爲如果 U，U' 爲二個相異的點反射，設 g 爲 U，U' 二點所決定的直線，則 U，U' 分別可表成

$$U = fg = gf, \quad U' = hg = gh$$

且 $f \parallel h$ 而與 g 垂直，故

$$UU' = (fg)(gh) = fh$$

爲一平移，可由向量 $2\overrightarrow{UU'}$ 表示。

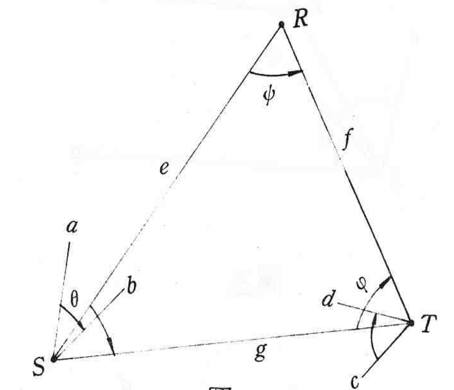
其次來考慮二個迴轉或平移之積。迴轉中心相同的二個迴轉之積，及平移的方向相同的二個平移之積已在上面討論過了。所以現在來考慮迴轉中心不相同的二個迴轉之積。設 ab 以 S 爲迴轉中心，迴轉角爲 2θ 之迴轉，cd 爲以 T 爲迴轉中心，迴轉角爲 2φ 之迴轉。$S \neq T$。現在來討論 $(ab)(cd)$ 所表的等長變換。設 g 爲連結二點 S，T 之直線。此時可得直線 e 及直線 f 使 $ab = eg$，且 $cd = gf$ 成立。如果 $\theta + \varphi \neq \pi$ 之倍數，則二直線 e，f 相交於一點 R。因

$$(ab)(cd) = (eg)(gf) = ef$$

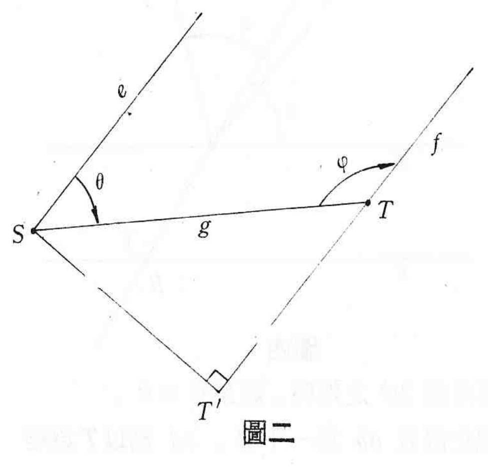
$(ab)(cd)$ 爲以 R 爲迴轉中心，以 2ψ 爲迴轉角之迴轉。此處，

$$\psi = \measuredangle(e, f)$$

$$-(\theta+\varphi) + \psi = \pi$$



圖一



圖二

故$\psi=\pi+(\theta+\varphi)$。如果$\theta+\varphi$爲$\pi$之倍數，則$e \parallel f$。此時$(ab)(cd)=ef$爲一平移。設$T'$爲從點$S$至直線$f$垂線之垂足，則此平移可表成$2\overrightarrow{ST'}$。此處

$$ST'=ST\sin\theta$$

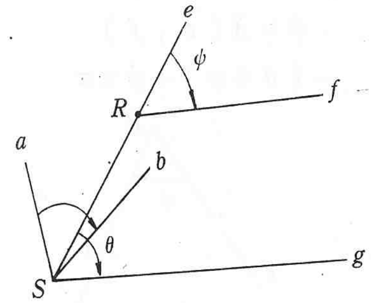
例如，ab爲關於S的點反射，cd爲關於點T的點反射時$\theta=\varphi=\pi$，即$S=ab$，$T=cd$。所以由上述得知：$(ab)(cd)$爲一平移。如上$g=\overleftrightarrow{ST}$，則

$$S=ab=eg$$

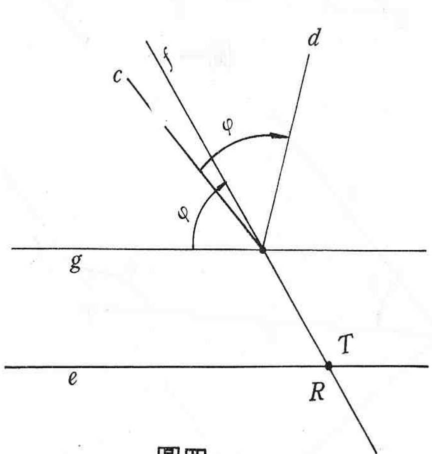
$$T=cd=gf$$

故$ST=ef$爲由$2\overrightarrow{ST}$所表示的平移。

其次假設ab爲以S爲回轉中心，回轉角爲2θ之迴轉，cd爲一平移而考慮它們的積$(ab)(cd)$。假設g爲經過S與直線c，d平行的直線，則(ab)，(cd)亦可分別表成$ab=eg$，$cd=gf$。設直線e，f之交點爲R、則$(ab)(cd)=ef$爲以R爲迴轉中心，迴轉角爲2ψ之迴轉。顯然$\psi=\theta$。



圖三



圖四

現在假設ab爲一平移，cd爲以T爲迴轉中心，迴轉角爲2φ的迴轉。經過點T作一直線g與a，b平行。又求一直線e使$ab=eg$成立。其次求一經過點T的直線f使$cd=gf$成立。則

$$(ab)(cd)=(eg)(gf)=ef$$

設R爲直線e，f之交點，則$(ab)(cd)$爲爲R爲迴轉中心，迴轉角爲2φ的迴轉。

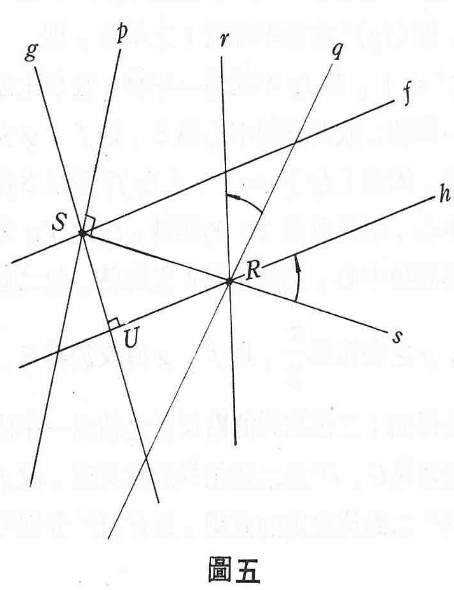
最後，考慮ab，cd均爲平移，其平移方向不相同的情形。如果直線v與平行二直線a，b正交於A，B，則平移ab可以向量$2\overrightarrow{AB}$表示。另一方面，二個點反射A、B之積爲一平移，亦可以$2\overrightarrow{AB}$表示。

故$ab=AB$成立。同理可得$cd=CD$。設G爲任一點，則存在點E和點F使$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EG}$，$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{GF}$，$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{GF}$成立。此時可得

$$\begin{aligned}(ab)(cd)&=(AB)(CD)\\&=(EG)(GF)\\&=EF\end{aligned}$$

爲一平移。此平移可以向量$2\overrightarrow{EF}$表之。

前面已經考慮了關於共點的或平行的三直線之直線反射之積，現在來考慮關於不平行且不共點的三直線的直線反射之積。假設p，q，r爲如此的相異三直線。此時不妨假設直線q，r相交而其交點爲R。因p，q，r不經過同一點，R不在直線p上。設s爲經過R而與直線p垂直的直線。設p，s之交點爲S。



圖五

設 h 為經過 R 且滿足 $qr = sh$ 的直線。因 $q \neq r$，故 $s = h$。因此，h 與 p 之交點與點 S 不相同。設 f 為經過 S 而與 h 平行的直線，則 $f \neq h$。設 g 為經過 S 而垂直於 h 和 f 的直線。故 g，h 正交於點 U，而 $U = gh = hg$ 成立。此時可得

$$S = ps = sp = gf = fg$$

因之

$$pqr = psh = Sh = fgh = fU = gfh = g\tau$$

此處 $\tau = fg$ 為一不等於 1 之平移（因 $f \neq h$ 之故）。又

$$g\tau = gfh = fgh = fhg = \tau g$$

成立。因為 $f \neq h$，$U \neq S$ 而 U 不在 f 上，S 不在 h 上。因為 pqr 可寫成 τg 之形狀，此等長變換稱為移射（平移反射之略）（glide-reflection）。對於移射 fU（$= Sh$），$(fU)^2 = (g\tau)^2 = g\tau g\tau = \tau gg\tau = \tau^2 \neq 1$（因 $f \neq h$）為一平移。今設 fU 為任一移射（故 U 不在 f 上）。今設 g 為經過點 U 與 f 垂直的直線，其與 f 之交點為 S，又設 h 為經過 U 與 g 垂直之直線，則 $f \parallel h$，而

$$U = gh = hg, \quad S = fg = gf$$

故

$$fU = fhg = \tau g = g\tau = gfh = Sh$$

此處 $\tau = fh$。故 g 亦為經過 S 與 h 垂直之直線。此直線稱為移射 $fU = Sh$ 之軸（axis）。現在假設一個移射有二個表法 fU 和 $f'U'$。即 $fU = f'U'$，故 $f'f = U'U$ 成立。如上所述，此變換為由向量 $2\overrightarrow{U'U}$ 所表示的平移。故 $f \parallel f'$ 而直線 $\overleftrightarrow{UU'}$ 與此二直線垂直。故，經過 U 而垂直於 f 之直線等於經過 U' 而垂直於 f' 之直線，即直線 $\overleftrightarrow{UU'}$。如果所給的移射可表成 $Sh = S'h'$，則 $S'S = h'h$ 成立。所以 $h \parallel h'$ 而直線 $\overleftrightarrow{SS'}$ 垂直於 h 和 h'。故經過 S 而垂直於 h 之直線同時為經過 S' 而垂直於 h' 之直線。如上述給了移射 fU 時（U 不在 f 上）亦可把 fU 寫成 $fU = Sh$ 之形狀。此處，S 為從 U 至 f 所下的垂線 g 與 f 之交點，h 為經過 U 與 g 垂直的直線。此時已知 g 為移射 fU 之軸，亦為經過 S 而垂直於 h 的直線。如果 fU 另外還可表成 $fU = S'h'$ 之形狀，則 $Sh = S'h'$ 成立。故由上面的討論 g 亦為經過 S' 而垂直於 h' 之直線。因之移射之軸與移射之表法無關。

最後注意：如果 fU 為一個移射，則 $(fU)^2$ 為一平移。其證明如下：設 g 為此移射之軸，即 g 為經過 U 而垂直於 f 之直線。故 $fg = gf$，又設 h 為經過 U 垂直於 g 的直線，則 $h \parallel f$。此時 $U = hg = gh$。故

$$(fU)^2 = (fgh)(fgh) = fhggfh = (fh)^2$$

因 $f \parallel h$，fh 為一平移，而 $(fh)^2$ 亦為一平移。

以上我們討論了，U 不在 f 上時 fU 為一移射。現在考慮 U 在 f 上的情形。此時 U 可寫成 $U = fg = gf$，f，g 在點 U 正交。故 $fU = f(fg) = g$ 為一個直線反射。故 $(fU)^2 = 1$ 成立。反之，**如果 $(fU)^2 = 1$ 成立，即 $fU = Uf$ 成立。則 U 必在直線 f 上。**此因如果 U 不在 f 上，則 $(fU)^2$ 為一個不等於 1 之平移之故。

前面我們討論了幾個直線反射之積。因為各直線反射為一等長變換，任意多個直線反射之積亦為一等長變換。以下我們想證明任何等長變換均可表成二個或三個直線反射之積。為了陳述我們要證明的定理，要先界定下列定義：如果一個等變換保存任何圓之繞法方向，則此變換稱為**保向的變換**；如果一等長變換改變各圓之繞法方向，則此變換稱為**反向的變換**。例如直線反射為反向的，而點反射是保向的變換。

現在我們可證明下列定理：

定理 1.1　如果一保向等長變換 Ω 使二個相異點不變，則此變換為恒等變換。

證明　設 F_1，F_2 為二個不變點，又設 f

爲這二點所決定的直線，P 爲任一不在直線 f 上的點。又設 h 爲經過點 P 而垂直於 f 的直線，F 爲其與 f 之交點。因爲等長變換把直線變換爲直線，故在變換之下直線 f 爲不變。又因爲角度在等長變換下也不變，故直線 h 被變至其本身。因爲 F_1，F_2 爲不變點，f 上各點均在 Ω 下不變，則點 F 亦爲不變。故 P 在 Ω 下之像點或滿足 $P\Omega = P1$ 或 $P\Omega = Pf$。因爲 f 爲反向故 $\Omega = f$ 不能成立。因之 $\Omega = 1$。

定理1.2 任何保向等長變換 Ω 均可表成二個直線反射之積。因之，Ω 或爲一平移，或爲一迴轉。

証明 設保向等長變換 Ω 把二點 A，B 變換至二點 A'，B'。不妨假設 $\Omega \neq 1$，故可假設 $A \neq A'$。如果還有一保向等長變換 Ω' 把 A，B 亦變換至 A'，B' 則

$$A\Omega(\Omega')^{-1} = A$$
$$B\Omega(\Omega')^{-1} = B$$

故依定理1.1可得 $\Omega = \Omega'$。設 f 爲線段 $\overline{AA'}$ 之垂直平分線。又設

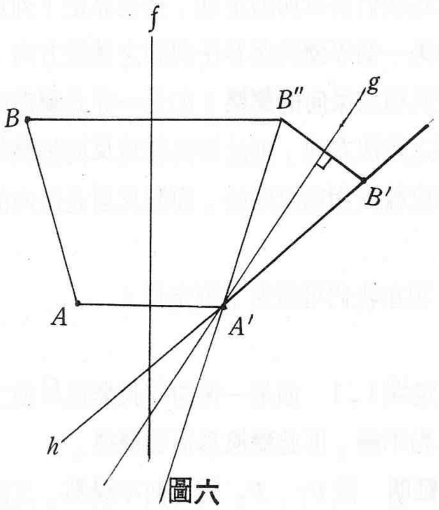
$$Bf = B'' \neq B'$$

因如果 $B'' = B'$，則 $\Omega = f$ 不爲保向等長變換之故。設 g 爲 $\angle B''A'B'$ 之平分線，則

$$Afg = A', \quad Bfg = B'g = B'$$

所以 Ω，$\Omega' = fg$ 均把二點 A，B 變換至 A'，B'。故依上面所得的結果

$$\Omega = \Omega' = fg$$



圖六

定理1.3 任何反向等長變換 Ω 爲一直線反射或爲一移射。

証明 如定理1.2證明，反向等長變換 Ω 可能與 f 相等。如果 $B'' \neq B'$，則把直線 $A'B'$ 稱爲 h。此時 fgh 爲一把二點 A，B 變換至 A'，B' 的等長變換。故依定理1.1，$\Omega = fgh$。此處三直線 f，g，h 既不共點（因 $A \neq A'$），又不平行。故 $\Omega = fgh$ 爲一移射。

由上面所論得知：等長變換群（即運動群）K 可由所有直線反射之集合生成。又任何等長變換必須爲直線反射，平移，迴轉（包含點反射）和移射中之一。因此僅有二種對合的等長變換，即直線反射和點反射。前者爲反向，後者爲保向。

§2 將平面幾何的性質以反射間關係來表示

設 α，β，γ，…表示任何等長變換；A，B，C，…表示點和關於這些點的點反射；a，b，c，…表示直線和關於這些直線的直線反射。對於等長變換 α，γ，$\gamma^{-1}\alpha\gamma$ 亦爲一等長變換。此變換以 α^γ 表之，稱爲 α 被 γ 所變換而得的變換。即 $\alpha^\gamma = \gamma^{-1}\alpha\gamma$。現在我們可證：

(2.1) $A\alpha = B$ 當而僅當 $A\gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma) = B\gamma$ 時成立。

(2.2) $a\alpha = b$ 當而僅當 $a\gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma) = b\gamma$ 時成立。

証明 設 $A\alpha = B$ 成立，則

$$A\gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma) = A(\gamma\gamma^{-1})\alpha\gamma = A\alpha\gamma = B\gamma$$

反之，如果

$$A\gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma) = B\gamma$$

成立，則得

$$B = A\gamma\,(\gamma^{-1}\alpha\gamma\,)\,\gamma^{-1}$$
$$= A\,(\gamma\gamma^{-1})\,\alpha\,(\gamma\gamma^{-1})$$
$$= A\alpha \text{ 成立}$$

對於被變換 γ 所變換的操作，我們又可得下列關係：

$$(\alpha^{\gamma_1})^{\gamma_2} = (\gamma_1^{-1}\alpha\gamma_1)^{\gamma_2}$$
$$= \gamma_2^{-1}(\gamma_1^{-1}\alpha\gamma_1)\gamma_2$$
$$= (\gamma_1\gamma_2)^{-1}\alpha(\gamma_1\gamma_2)$$
$$= \alpha^{(\gamma_1\gamma_2)}$$
$$(\alpha_1\alpha_2)^{\gamma} = \gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2\gamma$$
$$= \gamma^{-1}\alpha\gamma\gamma^{-1}\alpha_2\gamma$$
$$= (\gamma^{-1}\alpha\gamma)(\gamma^{-1}\alpha_2\gamma)$$
$$= \alpha_1^{\gamma}\alpha_2^{\gamma}$$

現在，因爲

$$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$$

故

$$(\alpha\alpha^{-1})^{\gamma} = (\alpha^{-1}\alpha)^{\gamma} = 1^{\gamma} = 1$$

故由上述的關係可得

$$\alpha^{\gamma}(\alpha^{-1})^{\gamma} = (\alpha^{-1})^{\gamma}\alpha^{\gamma} = 1$$

此式表示

$$(\alpha^{\gamma})^{-1} = (\alpha^{-1})^{\gamma}$$

此外還可以證明：

(2.3) 如果 α 爲對合的，則 α^{γ} 亦爲對合的。

証明 從 $\alpha^2 = 1$ 且 $\alpha \neq 1$ 可得

$$(\alpha\alpha)^{\gamma} = 1^{\gamma} \quad \text{即} \quad (\alpha^{\gamma})^2 = 1$$

並且，如果 $\alpha^{\gamma} = 1$，則 $\gamma^{-1}\alpha\gamma = 1$

故 $$\alpha = \gamma\gamma^{-1} = 1$$

與假設不合之故。

由 (2.1) 和 (2.2) 我們又可得下列二結果：

(2.4) 如果 A 爲 α 之不變點，則 $A\gamma$ 爲 α^{γ} 之不變點。其逆敍述亦成立

(2.5) 如果 a 爲 α 之不變直線，則 $a\gamma$ 爲 α^{γ} 之不變直線。其逆敍述亦成立。

因此，α 之不變點之集合和 α^{γ} 之不變點之集合間有一對一之對應存在。又 α 之不變直線之集合和 α^{γ} 之不變直線之集合間亦有一對一之對應存在。

再由 (2.4) 和 (2.5) 可得：

(i) 當而僅當 α 爲關於 a 之直線反射時，α^{γ} 爲關於直線 $a\gamma$ 之直線反射。此直線反射亦可表成 $a\gamma$（即 a^{γ} 亦可寫成 $a\gamma$ 即 $a^{\gamma} = a\gamma$）。

(ii) 當而僅當 α 爲關於點 A 之點反射時，α^{γ} 爲關於點 $A\gamma$ 之點反射。此點反射亦可表成 $A\gamma$（即 A^{γ} 亦可寫成 A^{γ} 即 $A^{\gamma} = A\gamma$）。

(iii) 當而僅當 α 爲以點 A 爲迴轉中心，迴轉角爲 θ 時，α^{γ} 爲以 $A\gamma$ 爲迴轉中心，迴轉角爲 θ 的迴轉。

(iv) 當而僅當 α 爲由向量 $\vec{v}$ 表示的平移時，α^{γ} 爲以 $\vec{v}\gamma$ 表示的平移。

(v) 當而僅當 α 爲移射時 α^{γ} 爲移射。並且如果〔α〕爲移射 α 之軸，則 α^{γ} 之軸〔α^{γ}〕爲直線〔α〕$^{\gamma}$。

(i) 之証明 如果 $\alpha = a$，則直線 a 上之點 A 爲不變點。故由 (2.4) $A\gamma$ 爲 a^{γ} 之不變點。因直線 $a\gamma$ 上的點均可寫成 $A\gamma$，$A \in a$ 之形狀，故 $a\gamma$ 各點均爲不變點而 $a\gamma$ 爲 a^{γ} 之不變直線。因 α 爲對合的，依 (2.3) α^{γ} 亦爲對合的。我們僅有兩種對合的等長變換，故 a^{γ} 必爲關於直線 $a\gamma$ 之直線反射。即對於直線反射 a，a^{γ} 亦爲直線反射。此直線反射亦可表成 $a\gamma$。

(ii) 之証明 設 α 爲關於點 A 之點反射。如果 a 爲經過 A 之任何直線，則直線 $a\gamma$ 經過點 $A\gamma$。因爲 A 和 a 爲 α 之不變點和不變直線，依 (2.4)，(2.5)，$A\gamma$ 和 $a\gamma$ 分別爲 α^{γ} 之不變點和不變直線。又因 α 爲對合的，α^{γ} 亦爲對合的。故 α^{γ} 爲二種對合的變換中的點反射，即關於點 $A\gamma$ 之點反射。此點反射亦可表成 $A\gamma$，即可寫成 $A^{\gamma} = A\gamma$。

(iii) 之証明　設 α 爲以 S 爲廻轉中心，廻轉角爲 θ 之廻轉，則 α 可寫成 $\alpha = fg$ 之形狀。此處 f，g 交於點 S 且 $\measuredangle(f, g) = \frac{\theta}{2}$。因爲 S 爲 α 之唯一不變點，$S\gamma$ 爲 α^γ 之唯一的不變點。另一方面 $\alpha^\gamma = (fg)^\gamma = f^\gamma g^\gamma$。如前面所說 f^γ, g^γ 分別爲關於 $f\gamma$, $g\gamma$ 之直線反射，而且 $S\gamma$ 在各直線上。又

$$\measuredangle(f^\gamma, g^\gamma) = \measuredangle(f\gamma, g\gamma) = \measuredangle(f, g) = \frac{\theta}{2}$$

因 γ 保存角度。故 α^γ 爲以 $S\gamma$ 爲廻轉中心，廻轉角爲 θ 之廻轉。

(iv) 之証明　設 α 爲由向量 $\vec{v}$ 所表的平移。則 α 可表成 $\alpha = fg$ 之形狀。此處 $f \parallel g$。設 h 爲與 f，g 垂直之一直線，其與 f，g 之交點分別爲 F，G，則 $\vec{v} = 2\overrightarrow{FG}$。現在

$$\alpha^\gamma = (fg)^\gamma = f^\gamma g^\gamma$$

如在上面所說，$f^\gamma = f\gamma$，$g^\gamma = g\gamma$。因爲角度在 γ 之下不變，故 $h\gamma$ 與 $f\gamma$，$g\gamma$ 垂直，而 $f\gamma \parallel g\gamma$。又 $F\gamma$，$G\gamma$ 爲 $h\gamma$ 與 $f\gamma$，$g\gamma$ 之交點，故對應的線分長度相同。即

$$\overline{FG} = \overline{(F\gamma)(G\gamma)}$$

因之，α^γ 爲一平移可由向量 $2(F\gamma)(G\gamma)$ 表示。因爲 $\vec{v} = 2\overrightarrow{FG}$，此向量 $2(F\gamma)(G\gamma)$ 可表成 $(\vec{v})\gamma$ 之形狀。

(v) 的証明　設 $\alpha = fU$ 爲一移射，則 $\alpha^\gamma = f^\gamma U^\gamma$。此處 f^γ 爲一直線反射，U^γ 爲一點反射。因 U 不在 f 上，U^γ 亦不在 f^γ 上，故 α^γ 爲一移射。移射 α^γ 之軸〔α^γ〕爲從 U^γ 所表的點至 f^γ 所表的直線所下的垂線。移射 α 之軸〔α〕爲從點 U 至直線 f 所下的垂線。設〔α〕$= h$，則 $fh = hf$ 且 $Uh = hU$ 成立。因之，

$$(fh)^\gamma = (hf)^\gamma, \quad (Uh)^\gamma = (hU)^\gamma$$

即

$$f^\gamma h^\gamma = h^\gamma f^\gamma, \quad U^\gamma h^\gamma = h^\gamma U^\gamma$$

成立。這二個關係表示：h^γ 所表的直線與 f^γ 所表的直線垂直，且 U^γ 所表的點在 h^γ 所表的直線上。故 h^γ 所表的直線爲從點 U^γ 至直線 f^γ 所下的垂線。即〔α^γ〕$= h^\gamma$。因爲 $h =$〔α〕，故得〔α〕$^\gamma =$〔α^γ〕。

如上述（i），（ii）兩項中，我們已得：

$$(2.6)\quad a^\gamma = a\gamma, \quad A^\gamma = A\gamma$$

之關係。在這些關係之左邊我們視 a，A 爲直線反射和點反射。在右邊我們視 a，A 分別爲直線和點。現在假設 $a\gamma = b$ 成立。在此式中我們視 a，b 爲直線。由此式和 (2.6) 之第一式可得 $a^\gamma = b$。在此式中 a，b 均被視爲直線反射。因此，$a\gamma = b$ 之關係與 $a^\gamma = b$ 之關係同値。在前者中 a，b 表示直線，在後者中 a，b 表示直線反射。同理可知：$A\gamma = B$ 之關係與 $A^\gamma = B$ 之關係同値。如此可得下列的表：在表的左右二邊，相對的式子爲同值

視 A，B，a，b 爲點和直線 $a\gamma = b$ $A\gamma = B$ 所以這些式子是以平面上的元素（即點，和直線）之關係寫成的。	視 A，B，a，b 爲點反射及直線反射 $a^\gamma = b$ $A^\gamma = B$ 所以這些式子是以等長變換群之元素（即點反射及直線反射）的關係寫成的。

如果 a，A 在 γ 之下不變，則得：

$$a\gamma = a \iff a^\gamma = a$$

即　$\gamma^{-1} a \gamma = a$

或　$a\gamma = \gamma a$.

$$A\gamma = A \iff A^\gamma = A$$

即　$\gamma^{-1} A \gamma = A$

或　$A\gamma = \gamma A$

以下我們希望把平面幾何的定理用關於反射的計算來證明，所以我們需要先把幾何的命題以群元素間（其實是反射間）的關係來敍述，並把群元素間的關係以幾何的語言來解釋。

所以我們來列舉一些簡單的群元素間的關係的幾何解釋於下：表中大文字均表點反射，小文字均表直線反射。又相異文字表相異的元素。

雖然我們已經在前面討論了下面(1)，(2)兩個關係，在這兒我們另外給出比較簡單的方法。

(1) $Ab = bA \iff$ 點在直線 b 上。
因如前面所述 $Ab = bA \iff Ab = A$，即 A 在直線反射 b 之下不變。故 A 在 b 上。
注意：此條件可寫成 $(Ab)^2 = 1$，即 Ab 爲對合的。

(2) $ab = ba \iff$ 直線 a 與直線 b 垂直。
因如前面所述 $ab = ba \iff ab = a$，即 a 在直線反射 b 下不變，故 $a \perp b$。
注意：此條件可寫成 $(ab)^2 = 1$，即 ab 爲對合的。

(3) $ab = bc \iff$ 或 $a \parallel c$ 而 b 爲二平行線 a，c 之中線，或 a，c 相交，b 爲 a，c 的交角之平分線。
因 $ab = bc$ 表示 $a^b = c$ 即 $ab = c$，故如果 $a \parallel c$，則 b 爲二平行線 a，c 之中線。如果 $a \nparallel c$，則 b 爲 ac 的交角之平分線。

(4) $Ab = bC \iff b$ 爲線段 $\overline{AC}$ 之垂直平分線。
因 $Ab = bC$ 表示 $A^b = C$ 即 $Ab = C$。故 C 爲在直線反射 b 之下 A 之像點。故 b 爲線段 $\overline{AC}$ 之垂直平分線。

(5) $aB = Bc \iff a \parallel c$ 且 B 在平行線 a，c 之中線上。
因 $aB = Bc$ 表示 $a^B = c$ 即 $aB = c$。故 c 爲在點反射 B 下 a 之像直線。故 $a \parallel c$ 且 B 在平行線 a，c 之中線上。

(6) $AB = BC \iff B$ 爲線段 $\overline{AC}$ 之中點。
因 $AB = BC$ 表示 $A^B = C$ 即 $AB = C$。故 C 爲點反射 B 下 A 之像點。故 B 爲 $\overline{AC}$ 之中點。

(7) $BfBAfA = 1 \iff$ 直線 f 平行於直線 $\overleftrightarrow{AB}$。
因由 $BfBAfA = 1$ 可得 $BAfAB = f$，故故 $f^{(AB)} = f$。即 $f(AB) = f$。因 AB 爲一平移，f 在 AB 之下不變，故 f 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 平行。

(8) $bFbaFa = 1 \iff$ 二直線 a，b 交於點 F。
因由 $bFbaFa = 1$ 可得 $F^{(ab)} = F$ 即 $F(ab) = F$。此處 ab 或爲一平移或爲一廻轉。因爲平移無不變點，故由 $F(ab) = F$ 得知 ab 爲以 F 爲廻轉中心的一廻轉。故 a，b 交於點 F。

(9) $ab = dc \iff a$，b，c，d 爲平行且 a，b 間之距離等於 d，c 間之距離，或者 a，b，c，d 爲共點，且 $\measuredangle(a, b) = \measuredangle(d, c)$。
如前面已知，ab 爲一平移或爲一廻轉。如果 ab 爲一平移，dc 亦爲同一平移，故 a，b，c，d 爲平行且 a，b 間之距離等於 d，c 間之距離。如果 ab 爲一廻轉，則 dc 爲同一廻轉，故 a，b，c，d 爲共點且 $\measuredangle(a, b) = \measuredangle(d, c)$。
注意：此時 $abc = d \neq 1$ 成立。故 $(abc)^2 = 1$ 成立。即 abc 爲對合的。反之，如果 $(abc)^2 = 1$ 成立，即 abc 爲對合的，因 abc 爲反向故 $abc \neq 1$ 之故。因此 abc 必爲一直線反射。即有一直線 d 存在，使 $abc = d$ 成立，即 $ab = dc$ 成立。

(10) $AB = DC \Longleftrightarrow ABCD$ 爲一平行四邊形。
因爲 AB 爲一平移，可以向量 $2\overrightarrow{AB}$ 表之，由 $AB = DC$ 可得 $2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$，即 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$。故 $ABCD$ 爲一平行四邊形。

注意：此時可得 $ABC = D \neq 1$。故 $(ABC)^2 = 1$ 成立。即 ABC 爲對合的。反之，如果 $(ABC)^2 = 1$ 成立，則 ABC 爲對合的。此因若 $ABC = 1$，則 $AB = C$ 而左邊爲平移無不變點，右邊有不變點 C，因而此爲不可能之故。因爲 ABC 爲保向的，故 ABC 爲一點反射。即有一點 D 存在使 $ABC = C$ 成立，即 $AB = DC$ 成立。

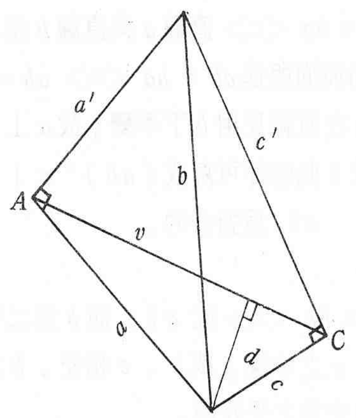
(11) $(BfA)^2 = 1 \Longleftrightarrow$ 直線 f 垂直於直線 $\overleftrightarrow{AB}$。
因 $(BfA)^2 = 1$，又 BfA 爲反向的，故 $BfA \neq 1$ 即 BfA 爲對合的。所以有一直線 g 存在使 $BfA = g$ 成立。故 $Bf = gA$。此變換或爲直線反射，或爲移射。如果它是直線反射，則有一直線 h 存在，使 $Bf = gA = h$ 成立。故 $B = hf$，$A = gh$ 成立。因此，f 垂直於直線 $h = \overleftrightarrow{AB}$。如果 $Bf = gA$ 爲一移射，則此移射之軸＝從 B 至 f 的垂線＝從 A 至 g 的垂線＝直線 $\overleftrightarrow{AB}$。故 f 爲垂直於 $\overleftrightarrow{AB}$ 之直線。

(12) $Ab = dC \Longleftrightarrow b \parallel d$ 且 $\overleftrightarrow{AC} \perp b$，$\overleftrightarrow{AC} \perp d$。
Ab 爲一直線反射或爲一移射。如果 Ab 爲一直線反射，則有一直線 h 存在使 $Ab = dC = h$ 成立。故 $A = hb$，$C = dh$。故 A，C 在 h 上而 $h \perp b$，$h \perp d$。故 $h = \overleftrightarrow{AC}$，$\overleftrightarrow{AC} \perp b$，$\overleftrightarrow{AC} \perp d$ 而 $b \parallel d$。如果 Ab 爲一移射，則移射 $Ab = dC$ 之軸＝經過 A 垂直於 b 之直線經過 C 垂直於 d 之直線＝直線 $\overleftrightarrow{AC}$。故 $\overleftrightarrow{AC} \perp b$，$\overleftrightarrow{AC} \perp d$，而 $b \parallel d$。

注意 i：由 $Ab = dC$ 可得 $AbC = d$。故 $(AbC)^2 = 1$。因 AbC 爲反向的，故 $AbC \neq 1$，即 AbC 爲對合的。反之，如果 $(AbC)^2 = 1$ 成立，則因 AbC 爲反向，$AbC \neq 1$。故有一直線 d 存在使 $AbC = d$ 成立。即 $Ab = dC$ 成立。

如在上面所得 $(AbC)^2 = 1$ 之條件爲有一經過 AC 二點之直線 h 滿足"A，C 在 h 上"且 $h \perp b$。依此結果可得下面很有用的預備定理：

預備定理 2.1 設 $aa' = A$，$cc' = C$，且 abc 爲一直線反射 d，則 $a'bc'$ 爲一直線反射之充要條件係經過 A，C 之直線 v 滿足 $d \perp v$（圖七）。



圖七

證明 因 $a'bc' = a'a \cdot abc \cdot cc' = AdC$，故 $a'bc'$（即 AdC）爲一直線反射之充要條件爲存在一經過 A，C 之直線 v 使 $d \perp v$ 成立。

注意 ii：另一方面由 $Ab = dC$ 亦可得 $dAb = C \neq 1$。故 $(dAd)^2 = 1$ 成立。即 dAb 爲對合的。反之，如果 dAb 爲對合的，即 $(dAb)^2 = 1$，且 $dAb \neq 1$ 成立，因 dAb 爲保向，存在一點 C，使 $dAb = C$ 成立。即 $Ab = dC$ 成立。如上面所得：$(dAb)^2 = 1$，$dAb \neq 1$ 之條件爲存在一直線 h 使 A 在 h 上且 $h \perp b$ 及 $h \perp d$ 成立。

(13) $(FB)^n \cdot (FA)^m = 1$ <=> 點 F 把線段 $\overline{AB}$ 內分成 $n : m$ 之比。
因 FB，FA 平移分別由向量 $2\overrightarrow{FB}$ 和 $2\overrightarrow{FA}$ 表示，$(FB)^n$ 及 $(FA)^m$ 亦爲平移，可分別由 $2n\overrightarrow{FB}$ 及 $2m\overrightarrow{FA}$ 表示。此時，因 $(FB)^n \cdot (FA)^m = 1$ 成立可得 $2n\overrightarrow{FB} + 2m\overrightarrow{FA} = 0$。因之 $\dfrac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{FB}} = -\dfrac{n}{m}$。故 $\dfrac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = \dfrac{n}{m}$。此式表示：$F$ 把線段 $\overline{AB}$ 內分成 $n : m$ 之比。

(14) $(BF)^n \cdot (FA)^m = 1$ <=> 點 F 把線段 AB 外分成 $n : m$ 之比。如上，可得 $2n\overrightarrow{BF} + 2m\overrightarrow{FA} = 0$。因之，$\dfrac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{BF}} = -\dfrac{n}{m}$ 故 $\dfrac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -\dfrac{n}{m}$。此式表示：$F$ 把線段 $\overline{AB}$ 外分成 $n : m$ 之比。

(15) $A_1MA_2M\cdots A_nM = 1$ <=> M 爲在諸點 A_1，A_2，$\cdots$、A_n 載有相同質量時的質量中心。
因爲對於各 i $(i = 1, \cdots, n)$，A_iM 爲一由向量 $2\overrightarrow{A_iM}$ 所表示的平移。由所給的關係可得：

$$2\overrightarrow{A_1M} + 2\overrightarrow{A_2M} + \cdots + 2\overrightarrow{A_nM} = 0$$

今設點 O 爲平面上座標系的原點，則 $\overrightarrow{A_iM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_i}$ 成立。故由上式可得

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_n} = 0$$

即

$$n\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$$

故

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}\{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}\}$$

即 M 爲載有相同質量諸點 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 之質量中心。

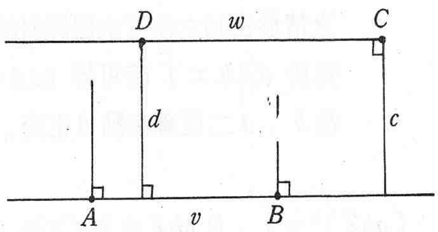
(16) $abP = 1$ <=> 直線 a 與 b 在點 P 正交。
由 $abP = 1$ 可得 $ab = P$。故 $(ab)^2 = 1$ 即 $ab = ba$。依(1)可知二直線 ab 正交。又 $b = a(ab) = aP = (ba)a = Pa$，故依(2)，點 P 在直線 a 上。同理得知 P 亦在 b 上。即二直線 a，b 在點 P 正交。
注意：由上述得知：如果 P 在 a 上，則 $Pa = aP$ 爲在點 P 與 a 垂直的直線。又在上面(12)之注意中，由假定 $(dAb)^2 = 1$ 可得 $dAb \neq 1$ 或 $dAb = 1$ 之二種情形。$dAb \neq 1$ 之情形在(12)之注意中已經討論了。對於 $dAb = 1$ 時可得 $bdA = 1$。故 b，d 二直線在點 A 正交。

(17) $(abZ)^2 = 1$，且 $abZ \neq 1$ <=> $a \parallel b$ 而 Z 爲任一點。
由 $(abZ)^2 = 1$ 且 $abZ \neq 1$ 得知 abZ 爲對合的。因爲 abZ 爲保向，故有一點 P 存在使 $abZ = P$ 成立。因之，$ab = PZ$。因爲 PZ 爲一平移，$a \parallel b$。此平移可由 $2\overrightarrow{PZ}$ 表示。因爲向量之一端是可以任意取的，Z 可爲任一點。

(18) $(abdcZ)^2 = 1$，且 $abdcZ \neq 1$ <=> a，b 相交，c，d 亦相交，且 $\chi(a, b) = \chi(c, d)$ 或 $a \parallel b$ 且 $c \parallel d$ 成立。
由所給條件，得知 $abcdZ$ 是對合的。又 $abcdZ$ 爲保向的，故它是一點反射。即有一點 P 存在使 $abdcZ = P$ 成立。此時可得 $abdc = PZ$。PZ 爲一平移。故 $abdc$ 爲由 $2\overrightarrow{PZ}$ 所表示的平移。因爲向量之一端是可以任意取的，Z 可爲任一點。由 $abdc = PZ$ 可得 $ab = PZcd$。此處 cd 或爲一平移，或爲一迴轉。如果 cd 爲一平移，因 PZ 爲一平移，ab 亦爲一平移。故 $c \parallel d$ 且 $a \parallel b$ 成立。如果 cd 爲一迴轉，則 ab 爲一平移 PZ 和一迴轉

c, d 之積。故，由上面所討論的一平移和一廻轉之積的做法，得知 $ab = PZcd$ 爲以 $\measuredangle(c, d)$ 之二倍爲廻轉角的一廻轉。因之 $\measuredangle(a, b) = \measuredangle(c, d)$ 成立。

注意： 在上面列擧了點反射及直線反射間諸關係的幾何意義。但是有一些關係是對於所有點反射或直線反射均成立的。所以是無幾何意義的。例如：$(ABC)^2 = 1$。是對於任何三點反射 A，B，C 都



圖八

成立的。其證明如下：因如果 A，B，C 爲任何三點，設 v 爲經過 A，B 之直線。經過點 C 作一與 v 平行的直線 w。又設 a，b 分別爲經過 A，B 而垂直於 v 之直線，c 爲經過點 C 而垂直於 w 之直線，則 c 亦與直線 v 正交。故 a，b，c 均與直線 v 正交。故有一與 a，b，c 平行的（即與直線 v 垂直的）直線 d 存在使 $ab = dc$ 成立。即 $abc = d$ 成立。因爲 $d \perp v$，d 亦垂直於直線 w。設 D 爲直線 d，w 之交點。此時可得 $av\,vb\,cw = dw$，即 $ABC = D$ 成立。故 $(ABC)^2 = D^2 = 1$ 成立。因爲 $(ABC)^2 = 1$ 對於任何三點 A，B，C 均成立，故不規定三點 A，B，C 間的任何關係。

現在再擧 G. Thomsen 所給的一例：設 a, b，c 爲任何三個直線反射。故 abc 或爲一直線反射，或爲一移射。如果 abc 爲一移射，則 $(abc)^2$ 爲一平移。此時

$$\begin{aligned}((abc)^2)^a &= a(abc)^2 a \\ &= bc\,a\,bc\,a \\ &= (bca)^2\end{aligned}$$

亦爲一平移。因爲對於二個平移，交換律成立（因平移可以向量表示，又向量對於加法交換律成立之故），

$$(abc)^2(bca)^2 = (bca)^2(abc)^2$$

即

$$\begin{aligned}&a(bc\,a\,bc\,bc\,a\,bc)a \\ &= (bc\,a\,bc)(bc\,a\,bc)\end{aligned}$$

即

$$a(bc\,a\,bc)^2 a = (bc\,a\,bc)^2$$

因之

$$[(bc\,a\,bc)^2]^{-1} a (bc\,a\,bc)^2 = a$$

即 $a^{(bc\,a\,bc)^2} = a$ 成立。如果 abc 爲一直線反射，則有一直線 d 存在使 $abc = d$ 成立。故 $abcd = 1$ 或 $bc = ad$ 成立。此時

$$bc\,a\,bc = bc\,a\,ad = bc\,d = a$$

成立。故 $(bc\,a\,bc)^2 = 1$。因之 $a^{(bc\,a\,bc)^2} = a$ 亦成立。即 $a^{(bc\,a\,bc)^2} = a$ 對於任何三直線反射 a，b，c 均成立。

—本文作者為本所研究員—