平方根的另一種計算法

王湘君

下面要介紹的平方根近似值的求法，方法簡便，整個過程只需要一點簡易的代數工具就夠了，而且所產生的誤差也極微。

一、解法過程

這個方法是根據觀察兩個連續完全平方數的差，等於它們平方根的和。例如，

$$\sqrt{49}=7\,,\quad \sqrt{64}=8$$

而

$$64-49=7+8$$

利用這件事實求平方根近似值如下：例如求 $\sqrt{51}$ 的近似值。既然 $49<51<64$，所以 $7<\sqrt{51}<8$，現在來計算 $\sqrt{51}$ 的分數部分的近似值 $\dfrac{(51-49)}{7+8}=\dfrac{2}{15}$ 故 $7\dfrac{2}{15}$ 是 $\sqrt{51}$ 的

數 x	近似值 A	平方根 S	誤差(1) $e=S-A$	近似值的平方 A^2	誤差(2) $E=x-A^2$
51	$7\frac{2}{15}\approx 7.133$	7.141	0.008	$50\frac{199}{225}\approx 50.884$	0.116
413	$20\frac{13}{41}\approx 20.317$	20.322	0.005	$412\frac{1317}{1681}\approx 412.783$	0.217
103	$10\frac{3}{21}\approx 10.143$	10.149	0.006	$102\frac{387}{441}\approx 102.878$	0.122
240	$15\frac{15}{31}\approx 15.484$	15.492	0.008	$239\frac{721}{961}\approx 239.750$	0.250
82	$9\frac{1}{19}\approx 9.053$	9.055	0.002	$81\frac{343}{361}\approx 81.950$	0.050

近似値。

$$(7\frac{2}{15})^2 \approx 50.884$$

或　　　$7\frac{2}{15} \approx 7.133$

而　　　$\sqrt{51} \approx 7.141$

另一個例子，計算 $\sqrt{413}$，因爲 $20^2 = 400$，故 $\sqrt{413}$ 的近似値爲

$$20\frac{413-400}{20+21} = 20\frac{13}{41}$$

我們核對一下：

$$(20\frac{13}{41})^2 \approx 412.783$$

下面是用計算機做出來的一些例子，這些例子足以引起學生的好奇心，他們會問“爲什麼這方法可以算得出平方根的近似値？”

二、分　　析

設 n 爲任意正整數，則 n^2 和 $(n+1)^2$ 是兩個連續完全平方數。

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 = (n+1)+n$$

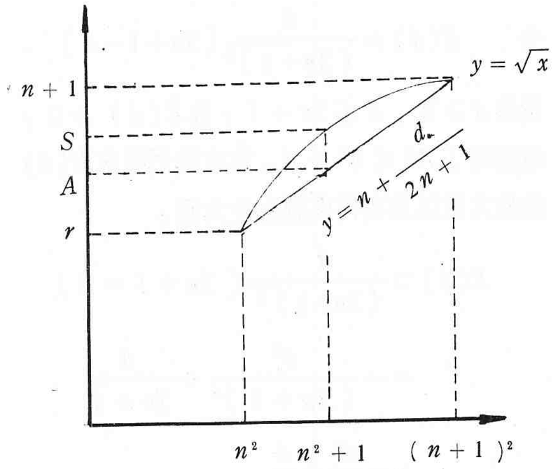
上式說明了兩個連續完全平方數的差等於它們平方根的和。

下面我們來看看這個方法的原理。假設該數（我們欲求其平方根）介於 n^2 和 $(n+1)^2$ 之間，設爲 n^2+d，其中 $0 \le d \le 2n+1$，其近似値 A 是

$$n+\frac{n^2+d-n^2}{n+(n+1)} = n+\frac{d}{2n+1}$$

這是 d 的一次函數，它的圖形是一線段：從 n $(d=0)$ 到 $n+1$ $(d=2n+1)$。所求之平方根 $\sqrt{x}$ 表示拋物線的一段的圖形表示如圖 1，所以函數它說明了這個方法，是一種線性內插法，換句話說，在 n^2 和 $(n+1)^2$ 之間有 $2n+1$ 個分數，而 n^2+d 是“第 d 個分段”故 n^2+d 的平方根，必須是 n 到 $n+1$ 之間的第 d 個分數，故其近似値爲

$$n+\frac{d}{2n+1}。$$



（圖 1）

從圖中看出一個很明顯的事實，就是近似値未超過眞正的平方根（$A \le S$），同時其誤差最大產生在區間 n^2 到 $(n+1)^2$ 的中點。這兩件事實，待會兒我們用代數來證明。

現在我們把求得的近似値平方與原來的數 n^2+d 作差，看一看 $(n^2+d)-A^2$ 到底有多大？

$$\begin{aligned}
A^2 &= (n+\frac{d}{2n+1})^2 \\
&= n^2+\frac{2dn}{2n+1}+\frac{d^2}{(2n+1)^2} \\
&= n^2+\frac{2dn}{2n+1}+\frac{d}{2n+1} \\
&\quad +\frac{d^2}{(2n+1)^2}-\frac{d}{2n+1} \\
&= n^2+\frac{d(2n+1)}{2n+1}\left[\frac{d}{2n+1}-1\right] \\
&= n^2+d+\frac{d}{(2n+1)^2}\left[d-(2n+1)\right]
\end{aligned}$$

所以，

$$(n^2+d)-A^2$$
$$=\frac{d}{(2n+1)^2}[2n+1-d]$$

令 $E(d)=\frac{d}{(2n+1)^2}[2n+1-d]$

既然 $d\geqslant 0$，$d\leq 2n+1$，故 $E(d)\geqslant 0$，這證明了 $A^2\leqslant n^2+d$。其次我們要求 $E(d)$ 的最大值以及在何處發生最大值。

$$E(d)=\frac{d}{(2n+1)^2}[2n+1-d]$$
$$=-\frac{d^2}{(2n+1)^2}+\frac{d}{2n+1}$$
$$=-\frac{d^2}{a^2}+\frac{d}{a}$$
$$(\text{令 } a=2n+1,\ 0\leq d\leq a)$$
$$=-\left(\frac{d}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

故 $E(d)$ 的最大值發生在 $d_0=\frac{a}{2}=\frac{2n+1}{2}$ 處，其值爲 $E(d_0)=\frac{1}{4}=0.25$，請看圖 2。

d	$E(d)$
0	0
$\frac{a}{8}$	$-\frac{1}{64}+\frac{1}{8}=\frac{7}{64}$
$\frac{a}{4}$	$-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$
$\frac{a}{3}$	$-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$
$\frac{a}{2}$	$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
$\frac{3a}{4}$	$-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$
$\frac{7a}{8}$	$-\frac{49}{64}+\frac{7}{8}=\frac{7}{64}$
a	0

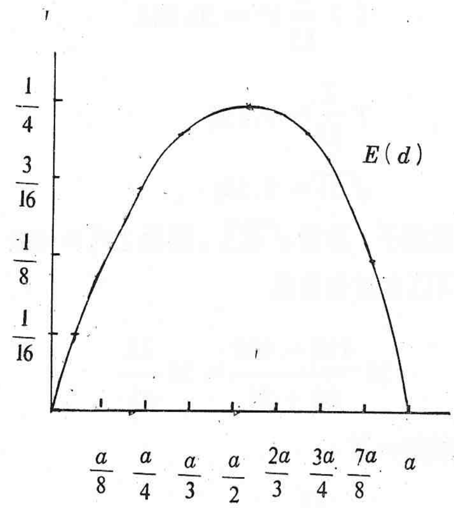


圖 2

這就證明了早先從圖 1 中觀察出來的事實：$E(d)$ 最大值發生在區間［n^2，n^2+1］的中點，而且我們把最大誤差限制在 0.25。

例： 求 $\sqrt{30.5}$ 的近似值

$$A=5+\frac{30.5-25}{5+6}=5\frac{5.5}{11}=5\frac{1}{5}$$

$A^2=(5\frac{1}{2})^2=30.25$，這時其誤差是 0.25，也就是誤差的最大可能值，因爲 30.5 正好在區間［25，36］的中央。

設 x 是任意非負實數，令 A 是其 $\sqrt{x}$ 的近似值。因爲 $A^2\leq x$，所以 $A\leq\sqrt{x}$，令 $e=\sqrt{x}-A$。早先我們探究了 E，這是 x 與其平方根近似值的平方的差，即 $E=x-A^2$。現在我們以同樣的方法來分析 e。當然在 e 和 E 之間存在了一些關係，但不是一般學生想像的 $e=\sqrt{E}$ 的關係。

$$e=\sqrt{x}-A\ \Rightarrow\ A=\sqrt{x}-e$$
$$A^2=(\sqrt{x}-e)^2=x-2\sqrt{x}\,e+e^2$$

因爲

$$x-A^2\leq 0.25$$

所以

$$2\sqrt{x}\,e - e^2 \leq 0.25$$

$$\Rightarrow \quad e^2 - 2\sqrt{x}\,e + 0.25 \geqslant 0$$

我們要解上列不等式的 e

首先我們令 $e^2 - 2\sqrt{x}\,e + 0.25 = 0$

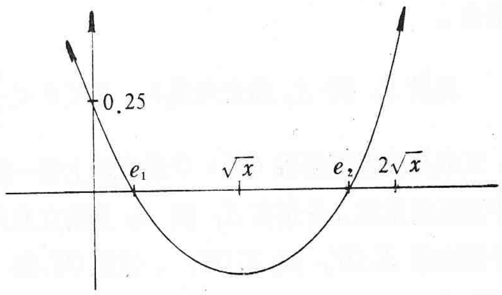
根據二次方程式根的公式

$$e = \frac{2\sqrt{x} \pm \sqrt{4x-1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4x} \pm \sqrt{4x-1}}{2}$$

令 $e_1 = \dfrac{\sqrt{4x} - \sqrt{4x-1}}{2}$

$$e_2 = \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{4x-1}}{2}$$



因此不等式的解為 $e \leq e_1$ ，或 $e \geq e_2$

又 $e \geqslant 0$ ， 且 $A = \sqrt{x} - e \geqslant 0$ ；

$\therefore e \leq \sqrt{x}$

所以

$$0 \leqslant e \leqslant e_1 = \frac{\sqrt{4x} - \sqrt{4x-1}}{2}$$

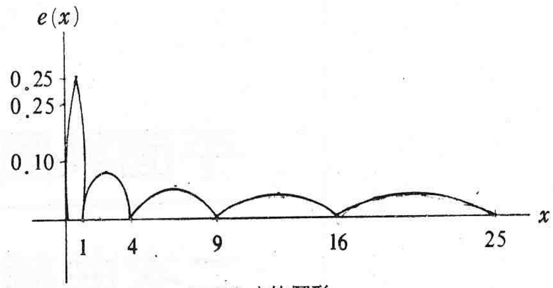
可見 e 的範圍是由原數 x 所決定，這又引起我們以直觀的方式來看其極限，也就是：當 x 愈來愈大時，e 是否會趨近一個特別值？

$$e_1 = \frac{\sqrt{4x} - \sqrt{4x-1}}{2}$$

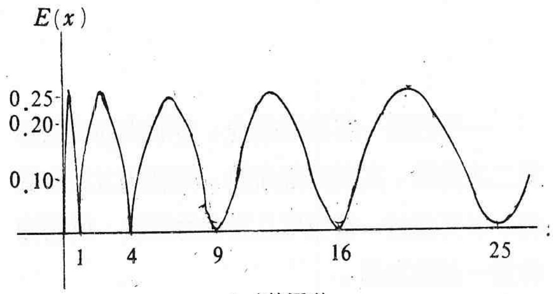
$$= \frac{\sqrt{4x} - \sqrt{4x-1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4x} + \sqrt{4x-1}}{\sqrt{4x} + \sqrt{4x-1}}$$

$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{4x} + \sqrt{4x} - 1\right)}$$

很明顯地，當 $x \to \infty$ 時，$e_1 \to 0$，所以 $e \to 0$ 而 E 是沒有極限的，也就是 x 很大時 E 是不規則的，但是 E 一再地受到 0 和 1/4 的限制。下面兩圖說明 e 和 E 的變化情形



$e(x)$ 的圖形



$e(x)$ 的圖形

例：求 $\sqrt{640800.5}$ 的近似值

$\because \quad 800^2 = 640000$

$$\therefore \quad A = 800 + \frac{800.5}{800 + 801} = 800.5$$

我們用計算機，看到

$$\sqrt{640800.5} = 800.50015$$

所以 $\quad e = 0.00015$

而 $\quad E = 640800.5 - 640800.25$

$\quad = 0.25$

我們可以看出一個事實：當原數很大時，我們算的近似值愈靠近其眞的平方根，而且它的平方與原數的誤差最大不超過 0.25 。

參考資料：Lowell Cormony: Analysis of a truck driver's square root algorithm, *Mathematics Teacher*, Feb. 1981, 144～149.

—本文作者現任教於師大附中—