三個互相正交的六階拉丁立方體找到了

本文取材自
J. Recreational Mathematics,
Vol 15(2), 1982, pp. 81~84

林克瀛

在一七七九，著名的瑞士數學天才歐拉（Euler）提出下面的問題：如何設法找出兩個六階的拉丁方陣使它們互相正交。歐拉本人預測這個問題沒有答案，然而一直到一百多年後，法國人Tarry才用笨法子（把所有的六階拉丁方陣都寫出來）來證明歐拉的想法是正確的（參閱筆者在六十一年九月科學月刊上「拉丁方陣和尤拉的預言」一文）。拉丁方陣（Latin square）名稱的由來是因爲歐拉本人習慣在方陣的格子上填入拉丁字母的原故。一個 n 階的拉丁方陣是一個 n 行 n 列的方陣，在 n^2 個小格子中分別填入 n 個不同的符號（以後爲方便起見一律用0，1，2，…，$n-1$ 來代表），但規定每一個符號必須在每一行和每一列中正好出現一次。兩個拉丁方陣重疊在一起以後，如果每一格上的兩個依序序排好的數字中，沒有兩格擁有相同的一對數字，也就是說（0，0），（0，1），…，（$n-1$，$n-1$）等正好各出現一次，則這二個方陣稱爲正交。合成的方陣稱爲歐拉方陣。圖一是一個三階歐拉方陣。

$$\begin{array}{ccc} 0\,1\,2 & & 0\,1\,2 & & 00\ 11\ 22 \\ 1\,2\,0 & + & 2\,0\,1 & = & 12\ 20\ 01 \\ 2\,0\,1 & & 1\,2\,0 & & 21\ 02\ 10 \end{array}$$

圖一　由兩個三階拉丁方陣合成的歐拉方陣

在最近收到的「趣味數學季刊」上，有三位美國人Arkin, Smith, 及Straus把歐拉的問題推廣到三維空間。他們考慮六階的拉丁立方體。一個 n 階拉丁立方體的定義是把數字0，1，…，$n-1$ 填入格子中使與立方體任何一邊平行的一排 n 個數字都不相同。圖二是兩個例子，分別是二階及三階拉丁立方體。

		012	120	201
01	10	120	201	012
10	01	201	012	120

圖二　兩個拉丁立方體

歐拉立方體的定義如下：把三個拉丁立方體重合，若合成後的立方體中每一格子中的三個數字所構成的一組數串，沒有兩組是重複的，則這些拉丁立方體稱爲互相正交，而合成的立方體就叫歐拉立方體。也就是說，（0，0，1），（0，0，2），…，（$n-1$，$n-1$，$n-1$）各數串正好各出現一次。例如利用圖一的拉丁方陣加以變化後可排出圖三中的 ABC 三個互相正交的三階拉丁立方體。

重合後得到如圖四所示的歐拉立方體。

A:	012	120	201
	120	201	012
	201	012	120
B:	012	120	201
	201	012	120
	120	201	012
C:	021	102	210
	210	021	102
	102	210	021

圖三　三個互相正交的拉丁立方體

000	112	221
122	201	010
211	020	102

Ⅰ

111	220	002
200	012	121
022	101	210

Ⅱ

222	001	110
011	120	202
100	212	021

Ⅲ

圖四　一個三階歐拉立方體

313	435	241	522	000	154
402	541	350	014	133	225
534	050	423	105	242	311
045	123	512	231	354	400
151	212	004	340	425	533
220	304	135	453	511	042

Ⅰ

201	353	415	134	542	020
330	422	501	245	054	113
443	514	030	351	125	202
552	005	143	420	211	334
024	131	252	513	300	445
115	240	324	002	433	551

Ⅱ

455	221	333	040	114	502
521	310	442	153	205	034
010	403	554	222	331	145
103	532	025	314	440	251
232	044	111	405	553	320
344	155	200	531	022	413

Ⅲ

120	504	052	315	431	243
213	035	124	401	540	352
302	141	215	530	053	424
434	250	301	043	122	515
545	323	430	152	214	001
051	412	543	224	305	130

Ⅳ

032	140	524	203	355	411
144	253	015	332	421	500
255	322	101	444	510	033
321	414	230	555	003	142
410	505	343	021	132	254
503	031	452	110	244	325

Ⅴ

544	012	100	451	223	335
055	104	233	520	312	441
121	235	342	013	404	550
210	341	454	102	535	023
303	450	525	234	041	112
432	523	011	345	150	204

Ⅵ

圖五　第一個被找到的六階歐拉立方體

以往有人預測六階歐拉立方體是不存在的，正如同六階歐拉方陣是不存在的一樣。但最近上述的三位美國人首次證明六階歐拉立方體的確存在，他們的結果如圖五所示。作者在原文中並沒有說明用什麼方法找到這個立方體，可能是利用電腦。

—本文作者現任教於清大物理系—