拓樸學中的一筆畫與尤拉公式

何景國·陳金章

本文寫作的目的，乃在以深入淺出的方式，利用圖形和簡易的文字來介紹兩個拓樸學裏的重要概念，藉以開濶中學生的視野，一是“一筆畫”的網路拓樸學（Network topology），一是尤拉示性數的拓樸不變量。

玆分兩部份敍述。第一部份談一筆畫的網絡拓樸性質與拓樸不變量的概念，證明尤拉（EULER）公式及一些重要定理，第二部份，將本文所要談的性質及定理加以舉例闡明。

第一部份

一個有趣的問題

有一個厚紙做的六面體模型（見圖一）。周界夾縫是用飯粒黏合的。一天晚上，一隻蟑螂饑不擇食，把黏有飯粒的地方全部咬破，根據蟑螂之本性，已經咬過的地方，決不會回頭再咬一遍的。當然囉！蟑螂是不會有數學頭腦，而是僅靠它本能，作合理的行動罷了。現在試想一想，它應該依照怎樣的順序，才能把黏合的夾縫通通咬光呢？

這一個問題與數學上的這個問題很類似：

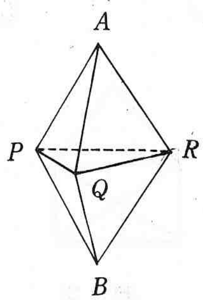


圖 一

使鉛筆不能離紙上的圖形，用一筆畫描完此圖形而不重複同一路線　這便是拓樸學中的網絡問題。

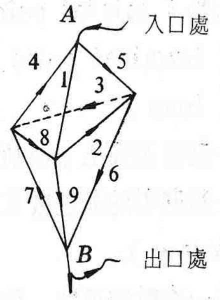


圖 二

由視察看出這個模型路線是可以一次不重複走過同一路線。如沿著箭頭次序（1，2，3，…，9）走，就是蟑螂從A處進入，走遍全程而從B處離開所走的路線之一（見圖㈡）。

一筆畫是拓樸性質，也是一種網絡問題。要研究網絡的問題，請先了解下面的一些名詞及專門術語。

所謂網絡是一種由有限條的曲線段，包括直線所組成之圖形。而每條曲線段都有兩個相異的端點。

譬如一個城市內的街道，巴士路線，電車路線或下水道等，都可構成一張網路圖（如圖三所示），這些都是網絡問題的範例。

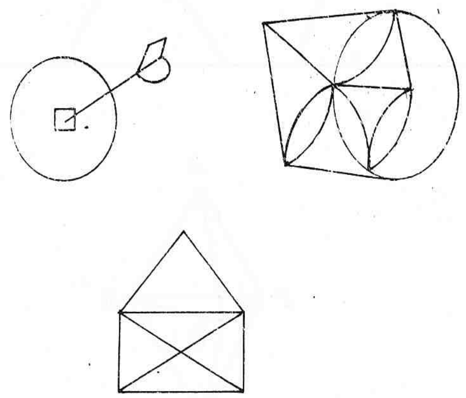


圖 三

幾個名詞解釋

⑴組成網絡的曲線段，稱爲網絡的弧（arcs）。

⑵網絡中每條曲線段之交點，稱爲頂點（nodes）。

⑶互相銜接的一串弧，稱爲路徑（paths）。

⑷若起點（initial point）與路徑的終點（terminal point）重合的稱爲環路（loop）。

⑸如一點在某弧上，則稱此點與該弧關聯。

⑹同一點關聯的弧之數目，稱爲該點的度（degree）。

⑺度爲一奇數的頂點，稱奇頂點（odd nodes）；度爲一偶數的頂點，稱爲偶頂點（even nodes）。

⑻沒有奇頂點的網絡，稱尤拉網絡（Euler network）（見圖四）。

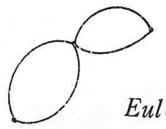


圖 四

⑼一個網路，如果它的任意兩個頂點，都可用一條路連結起來，則此網絡稱爲連通的（connected）。如圖五所示的網絡，其中黑圈點爲奇頂點，空心點爲偶頂點。

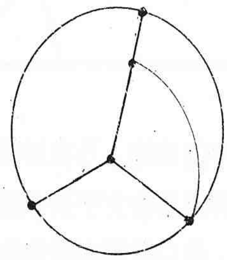


圖 五

一筆畫

如果一個網絡的全部弧可以排成一條路徑這個網絡就稱爲"一筆畫"。這裡，我們再提出一個問題，圖一除了A處（或B處）進入之外，由任一點進入，試看看是否也能夠一次通過所有黏有飯粒之夾縫。換句話說，每一邊界只許經過一次而不准重複走。結果，我們發現這是不能的！爲什麼呢？爲了回答這一問題。如果把每一邊可能走的路徑都拿來試一試，逐一檢查那條路徑是否符合要求。這種解法太繁而又太困難，因爲這個問題共有$(2^5 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2^2) \cdot 2 = 264$ 種不同的路線，我們自然要放棄這種方法。

現在我們以直觀方式來分析下面的尤拉定理，然後再加以嚴密的分析與證明。

尤拉定理

在一個網絡中，如果能夠一次走完而不重複任何一條路徑之充要條件是：這個網絡中的

奇頂點數恰爲2或0。如有奇頂點存在，則其始頂點必落在網絡中的一個奇頂點上。

1. 直觀法的分析

既然一筆畫是不許可在一條路徑走兩次而能把全部網絡連續通通走完，它一定包括有一個起始頂點，一個終結頂點和一定數目的通過點。當使用這方法時，又須分兩種情形來考慮:

(1)起始頂點與終結頂點相異：

在這情況之下，不管走那一條路徑，只要不重複的走過所有的弧，最後一次都是畫出的。因此起始頂點必定是個奇頂點，相對地，同樣地對最後一次是畫入的，故終結頂點亦爲一個奇頂點。其餘的頂點，就是通過點，而集中在每一通過點的“度”必是個偶數。因爲每一通過頂點，若有 n 條弧進來，就須有 n 條弧走出去。所以該通過點的度，必爲一偶數。

在這個情形下的網路中，只有兩個奇頂點：起始頂點與終結頂點。

(2)起始頂點與終結頂點同爲一點：

在這情況之下，最後一次所走的路徑必定是走進該頂點的。因此該點爲一偶頂點。再由於所有通過點均爲偶頂點，故這是一個尤拉網絡。

2. 嚴密分析與證明

引理1 若一網絡N是可以一次走完而不重複任何一條路徑則這網絡N是連通的，並這個網絡中的奇頂數恰爲2或0。

証明 設網絡N中所有弧排成如下的路徑:

$$R=(a_1, a_2, \cdots, a_k)$$

式中 $a_i=V_{i-1}V_i$

且 $i=1, 2, 3, \cdots, k$

又這裏$V_0, V_1, \cdots V_k$ 包括這網絡全部頂點(可能有重複)

因爲任何一頂點至少是一條弧的端點。任取V_i, V_j, $i<j$，它們可用路徑($a_{i+1}, \cdots, a_j$)聯結起來，所以網絡是連通的。

設網絡N中之任一頂點爲V，且V在序列$V_0, V_1, \cdots, V_k$中出現t次。

則 $V=V_{i_1}=V_{i_2}=\cdots\cdots=V_{i_t}$

其中 $0\leqslant i_1<i_2<i_3<\cdots<i_t<k$

故，對任一個i_r ($1\leq r<t$) $i_r+1<i_{r+1}$ (因任一弧之端均爲相異之故)。

如果 $V\neq V_0$ 或 $V\neq V_k$

即 $i_1>0$, $t_i<k$

則以V爲端點的弧有如下的 $2t$ 條：

$$a_{i_1}, a_{i_1+1}, a_{i_2}, a_{i_2+1}, \cdots, a_{i_t}, a_{i_t+1}$$

如果 $V=V_0\neq V_k$

即 $i_1=0$, $i_t<k$

則以V爲端點的弧有如下的$2t-1$條：

$$a_1, a_2, a_{i_2+1}, \cdots, a_{i_t}, a_{i_t+1}$$

如果$V=V_k\neq V_0$則以V爲端點的弧也有$2t-1$條。

如果R是閉路徑，即$V_0=V_k$且$V=V_k$則

$$i_1=0, i_t=k$$

且以V爲端點的弧就只有如下的$2t-2$條：

$$a_1, a_{i_2}, a_{i_2+1}, \cdots, a_{i_t-1}, a_{i_t+1}, a_k$$

總言之，如果R是閉路，那麼這網路的任一頂點都是偶頂點；如果R不是閉路，那麼，有兩個奇頂點V_0和V_k，其餘的頂點都是偶頂點。

因此，不連通的奇頂點數不是0或2的網絡一定不能一筆畫。

引理2 若N爲一連通的尤拉網絡，則N的所有路徑均可排成一條閉路徑。

証明 分下列三步證明

(1) 在尤拉網路N中任取一頂點V_0，則在N中必能夠找到從V到V的路徑。

如取弧

$$a_1=V_0V_1,\ a_2=V_1V_2,$$
$$a_3=V_2V_3, \cdots\cdots$$

則得路徑

$$R=(a_1, a_2, \cdots, a_k)$$

其中

$a_i = V_{i-1}V_i$ 且 $i=1, 2, \cdots, k$

若$V_k \neq V_0$則這路徑一定可以繼續延長，而得路徑（$a_1, a_2, \cdots\cdots a_k, a_{k+1}$）。由於$N$中的弧是有限多個故必有某一個$V_m = V_0$即該路徑是閉的。

(2) 若N是連通的尤拉網絡，且假設R不包含所有的弧，則一定能夠找到另一條路徑R'，它包含的比R更多。

設 $R = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$

其中 $a_i = V_{i-1}V_i$, $V_k = V_0$

從N中把R去掉，得另一個尤拉網絡N'。

因爲任取N'中一頂點V_0，N中有偶數個條弧以A爲端點，R是閉路徑，所以R也有偶數個條弧以A爲端點。

因此，N'中以A爲端點的弧也是偶數個。

故，R與N'必有共同的頂點。

設 $A_0 = V_r$

其中 $1 \leqslant r \leqslant k$

由(1)知

N'中必有從A_0到A_0的閉路徑R'

$R' = (a'_1, \cdots, a'_s)$

其中

$a'_j = A_{j-1}A_j$

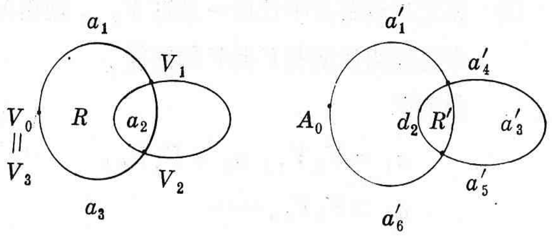
$(j=1, 2, \cdots, s)$

且 $A_s = A_0$

故

$R' = (a_1, \cdots, a_r, a'_1, \cdots, a'_s, a_{i+1}, \cdots, a_k)$

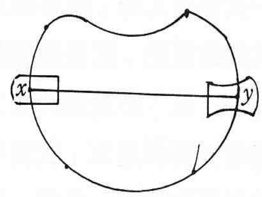
上述路徑R'是閉的，R'包含的比R多，見下圖示：



(3) 由(1)知：在N中取出一條閉路徑R，如果R沒有包含所有的弧，依(2)取一條包含弧比R多的閉路R'。若R'還沒有包含所有的弧，再如法取R''，如是者繼續擴大下去。由於N中，總共只有有限條的弧，總有一時候（比如說在擴大成R^*的時候）不能再擴大下去了。這時，根據(2)，那閉路徑R^*必然包含N中所有的弧。

引理3 若連通的網絡N的奇頂點數爲2則N必能夠一筆畫。

証明 若在N中加添一條連結奇頂點X，Y的弧a^*。



其中限定a^*不與N中原有的不相交。

在加添a^*後所得的網絡N^*就是一個沒有奇頂點的連網絡了。

由引理2得一條閉路徑

$(a^*, a_1, a_2, \cdots, a_k)$

故N中的全部可以排成一條路徑。

綜合上述三個引理，尤拉定理得證。

究竟對一般奇頂點個數$\geqslant 2$的連通網絡要多少筆才能夠畫成呢？要回答這一個問題，先要證明下面的引理。

引理 網絡的奇頂點個數定爲偶數個。

証明 設b爲網絡中弧的條數，且k_n爲度n頂點的數目。

由於每一弧有兩端點，而每一個度n的頂點有n個端點，故得：

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 3k_4 + \cdots + nk_n + \cdots = 2b$$

因爲 $k_1 + 3k_3 + 5k_5 + \cdots\cdots$ 爲一偶數

故　　$k_1 + k_3 + k_5 + \cdots\cdots$　爲一偶數

這正證明了奇頂點的個數是一偶數。

定理　設網絡N是有 $2N$ 個奇頂點的連通網絡，$n > 1$，那麼N全部弧至少可以排成n條路徑（彼此沒有公共弧的）。

証明　把 $2n$ 個奇頂點分成n對

$$V_1, U_1; V_2, U_2; \cdots, V_n, U_n$$

給N添上n條新的弧 $a_i^* = V_i U_i$

則網絡 N^* 是沒有奇頂點的進通網絡。

將 N^* 的全部排成閉路徑R，然後從中把新添的弧去掉，於是R被切成n截，其中每一截皆爲N中的一路徑，而且這n條路徑包含了N的全部弧。如果N能夠排成q條路徑，考慮奇點個數則有

$$2n \leqslant 2q$$

即　　　　$n \leqslant q$

即至少要n條路徑的條件已得證。

綜合上述結果，本定理得證。

數學家尤拉研究多面體的問題時，就在多面體的頂點數、稜邊數和表面數間發現了一個重要關係。這就是：對任何多面體，它的稜邊數加二，恒與它的頂點數及表面數之和相等。這種關係，一般稱爲尤拉公式。

由於正多面體可視爲在三度空間中的點和線之一個連通網絡圖形，因此設一正多面體的頂點數爲 N_0，及稜邊數 N_1 與表面數 N_2 則得：

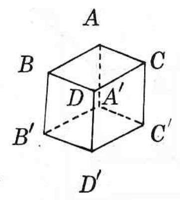
$$N_0 + N_2 = 2 + N_1$$

或

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2$$

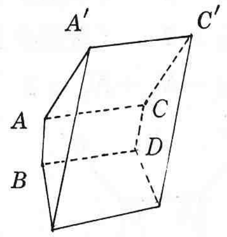
底下我以正六面體爲例證明之。

正六面體的平面網絡圖形：

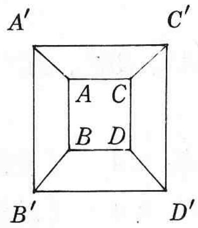


正六面體

將A' B' D' C' 擴大



壓成平面的網絡



（圖①）

因此就能將整正六面體壓成一平面網絡。

雖然六面體　　平面圖形的形狀已改變，但是點線的關係仍保存。用術語來說，就是所謂的拓樸變換上一致。

在圖①中得：

$$N_0 = 8\ ,\quad N_1 = 12\ ,\quad N_2 = 6$$

注意：$N_2 = 6$ 是包含了無邊界面（unbonnded faces）

因此滿足尤拉公式：

$$N_0 - N_1 + N_2 = 8 - 12 + 6 = 2$$

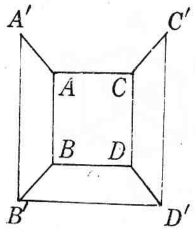
拆去$A'C'$得下圖②，此時：

$N_0 = 8$　（不變）

$N_1 = 11$　（少1）

$N_2 = 5$　（少1）

但仍滿足　$N_0 - N_1 + N_2 = 2$



（圖②）

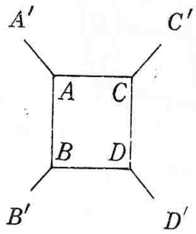
再拆去$A'B'$ ，$B'D'$，$D'C'$，得下圖③，此時

$N_0 = 8$　（不變）

$N_1 = 8$　（較前少 3 ）

$N_2 = 2$　（較前少 3 ）

但仍滿路　$N_0 - N_1 + N_2 = 2$



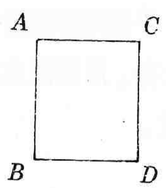
（圖③）

最後拆去AA'，BB'，CC'，DD' 得下圖④，此時

$N_0 = 4$　（較前少 4 ）

$N_1 = 4$　（較前少 4 ）

$N_2 = 2$　（與前不變）



（圖④）

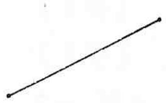
仍滿路　$N_0 - N_1 + N_2 = 2$

由此可知：在一個連通網絡中，每拆除一稜而仍維持連通的話，則下列情形必恰有一發生：

(1)　N_0 維持不變，N_2 減少 1

(2)　N_2 維持不變，N_0 減少 1

故，在每一個階段，$N_0 - N_1 + N_2$ 均維持不變，最後圖①必成如下圖形：



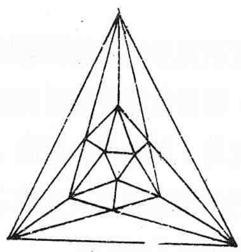
因此，顯然易得：

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2 - 1 + 1 = 2$$

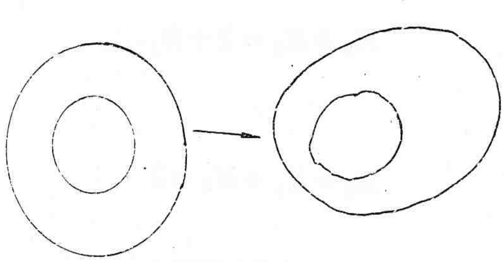
仿照上述例證，我們得到下表：

正多面體	N_0	N_1	N_2	$N_0 - N_1 + N_2$
正四面體	4	6	4	2
正六面體	8	12	6	2
正八面體	6	12	8	2
正十二面體	20	30	12	2
正二十面體	12	30	20	2

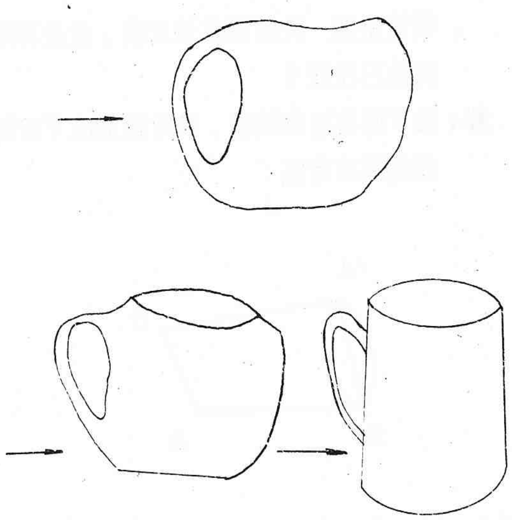
上述我們所討論的正多面體之尤拉示性數其實是一種有趣的拓樸不變量。像這種把正六面體壓成平面的網絡圖形（見圖①）就是所謂的同胚變換。直觀的做法，就是想像一個圖形是用麪團捏成的，它便有伸縮性，可以任意拉長或壓縮，甚至把它扭轉，以至變成奇形怪狀，這當然與原形大小不同，但其「點集合」之量却是一樣的。所以從拓樸組合觀點來看正二十面體與下圖形，是同胚的圖形。



再看下圖中所示的五個物體，它們的外觀雖然改變了形狀，可是物體本身保持完整，並沒有分裂。像這種圖形，它們是同胚的。



（圓圈餅）　　　　（碗狀餅）



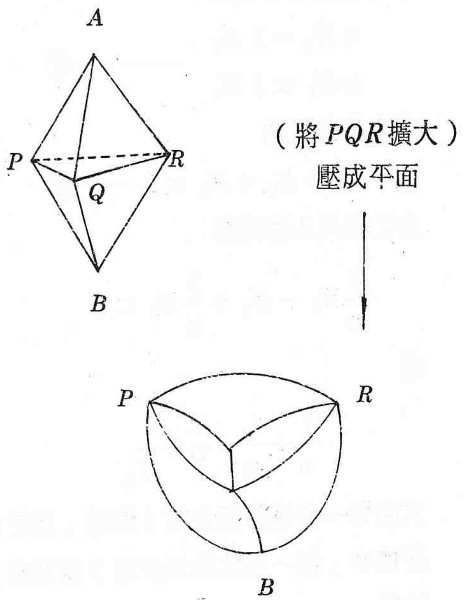
(咖啡杯)

上圖的圓圈餅經過揉捏、拉扯、扭轉、彎曲之後即可變形成爲咖啡杯，反之亦然。不但如此，它們的尤拉示性數却是一樣的（我們將有例7中詳加證明）。

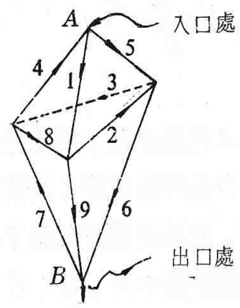
第二部份

例1 蟑螂問題

現在讓我們回到前面所述的趣味問題。經過同胚變換的圖一和下面的網絡圖形是一致的。



很容易發現點 A 與點 B 爲奇頂點，其餘均爲偶頂點。因此蟑螂從這二點中之一開始，都可以一次走遍全部黏合的夾縫。參考下面路線圖。

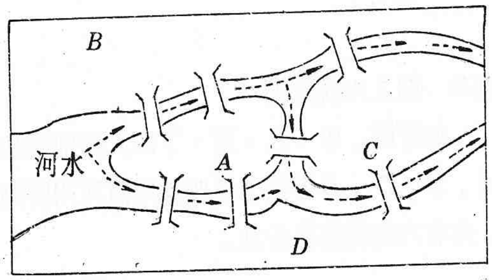


路線順序：

$$A \overset{1}{-} Q \overset{2}{-} R \overset{3}{-} P \overset{4}{-} A \overset{5}{-} R \overset{6}{-} B \overset{7}{-} P \overset{8}{-} Q \overset{9}{-} B$$

例2 "可尼斯堡"七橋問題（Königsberg bridges）

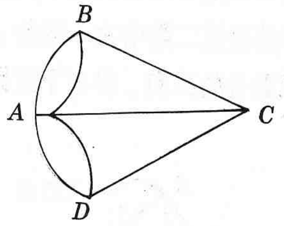
在 18 世紀時，位於可尼斯堡城的樸里格河上有七座橋，它們連續了河中的兩個小島，同時也連接了河的兩岸（見下圖示）。



圖中)(表橋，A,B,C,D表四個小島

當時鎮民就提出過一個問題，"看看能否一次走完這七座橋，但是每座橋只經過一次而不准重複"。結果從來沒有人能解決這個難題。後來大數學家尤拉（Euler）於 1736 年提出了一個簡單而巧妙的答案，才解決了這個人所熟知的懸案。

解：爲了解說這個問題是"不可能解"的，我們依如下方法把這七座橋，畫成下面的網絡圖，就很容易明白了



因爲A代表小島，河水分兩邊流，B是河的北部，D是河的南部，故設A，B，C，D代表它們，並以曲線段代表了橋。

計算網絡圖中A，B，C，D的度，可得下表：

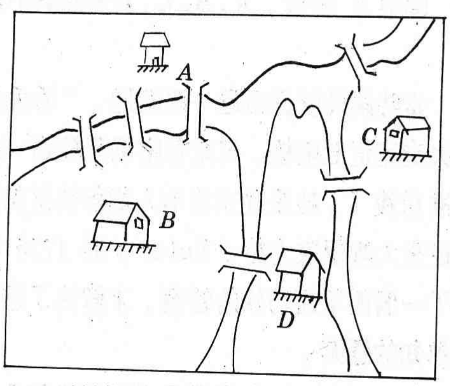
頂點	A	B	C	D
度數	5	3	3	3

因此，A，B，C，D爲所謂的奇頂點，而奇頂數超過 2，故知Königsberg 七橋問題是不可能一次走完這七座橋。

註說： 如果要一次行遍小島A以及所有河岸，在B與D區域須再加築上一座新橋就可以了！

例3 四人六橋問題

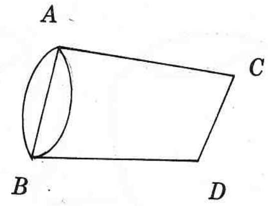
如附圖，甲、乙、丙、丁四人分別居住在A，B，C，D等地；但四地均由河川所割離，共有六座橋連絡各地。



圖中)(表橋

問： 是否每個人均可以由自己住家，將六座橋恰走過一次訪問其他三家，最後再回到自己住家？

解： 爲了解答這個問題，將附圖劃成下面的網絡圖來考察：



圖中，A，B，C，D表住家，各弧表橋。計算網絡中各頂點之度，得下表：

頂點	A	B	C	D
度數	4	4	2	2

各點均爲偶頂點，故答案是肯定的。

例4 三維空間中正多面體的形態。

三維空間中正多面體有那幾種形態？

解： 由於一正多面體是每一面均含有相同的邊數，而且每一頂點含有相同的面數。因此設一個正多面體有N_2個面，每邊都是一個n邊正多邊形，每一頂點都有m條邊相會。則得：

$$\begin{aligned} nN_2 &= 2N_1 \\ mN_0 &= 2N_1 \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

由尤拉公式知

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2 \quad \cdots\cdots ②$$

由①式代入②式得

$$\frac{2}{m}N_1 - N_1 + \frac{2}{n}N_1 = 2$$

或

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{N_1},$$

又因每一多邊形至少有 3 條邊，且在多面體中，每一頂點必至少有 3 邊相會。故得：

$$m \geqslant 3 \text{ , } n \geqslant 3$$

然而$m > 3$，$n > 3$是不可能同時成立的。否則會有下面矛盾：

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{N_1}$$

故$m = 3$或$n = 3$必有一成立。今分別討論於下。

當$n = 3$時，有：

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{6}=\frac{1}{N_1}$$

得

$$\begin{cases} m = 3 \text{ , } 4 \text{ 或 } 5 \\ N_1 = 6 \text{ , } 12 \text{ 或 } 30 \\ N_2 = \frac{2}{3} N_1 = 4 \text{ , } 8 \text{ 或 } 20 \end{cases}$$

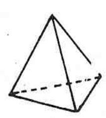
同理可知：當$m = 3$時，亦有：

$$\begin{cases} n = 3 \text{ , } 4 \text{ 或 } 5 \\ \text{且 } N_1 = 6 \text{ , } 12 \text{ 或 } 30 \\ N_2 = 4 \text{ , } 6 \text{ 或 } 12 \end{cases}$$

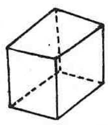
綜合上述結果，可得下表：

正多面體	N_0	N_1	N_2	$N_0 - N_1 + N_2$
正四面體	4	6	4	2
正六面體	8	12	6	2
正八面體	6	12	8	2
正十二面體	20	30	12	2
正二十面體	12	30	20	2

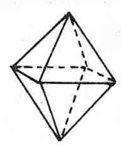
這證明了：三維空間中的正多面體只有下列五種（見圖示）



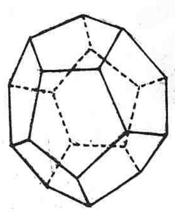
正四面體



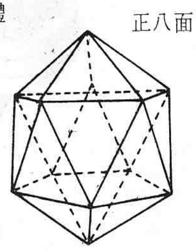
正六面體



正八面體



正十二面體



正二十面體

例5　哈米敦（Hamilton）環遊世界的遊戲

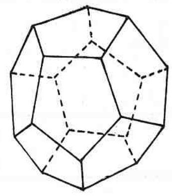
在 1850 年，愛爾蘭名數學家哈米敦提出一個數學問題：

“試在五種正多面體中之一個上面，從任一個頂點出發，沿著稜邊，看看能否一次走過該正面體的全部頂點，但是每一頂點只許通過一次而不准重複”。

為了明確解說這個問題，我們以正十二面體來作說明。

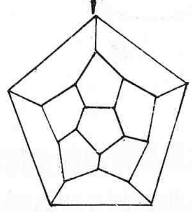
我們把每一頂點當作世界上的一個大城市的話，如紐約、東京、巴黎……等，就會有二十個大城市出現（承上例 4 知，正十二面體有 20 個頂點，30 條稜迹，12 個表面）。

我們將正十二面體中虛線面積擴大，壓成平面，畫成下面的網絡圖，就可以發現：



正十二面體

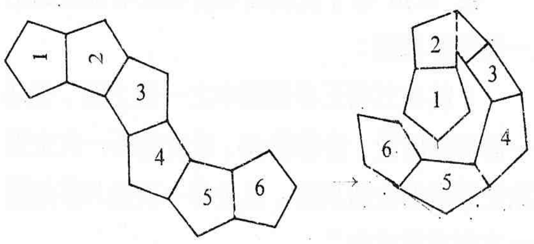
將虛線面擴大
壓成平面



平面網絡圖

“這個網絡圖形是由許多正五邊形合併而成的，其中每一個面的稜邊數相等，每一頂點的度亦相同”

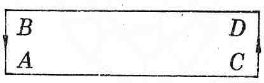
所以只須找到如下圖示的一串正五邊形，問題就可以解決了。

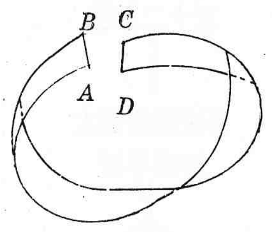


這一串的五邊形，如在原來的正十二面表示出來，就很容易地走遍各個「城市」了，這個問題就得到解答了。故答案是肯定的。

例6 奇異的莫比烏斯帶 (Möbius band)

莫比烏斯帶是拓樸學的基本圖形之一，也是一件奇物，它只有一面和一條稜邊。莫比烏斯帶是由用一峽長紙條，先將紙條扭轉 180°，然後再用膠水將它兩端黏接，使成一個環狀，即成 (見下圖示) 。



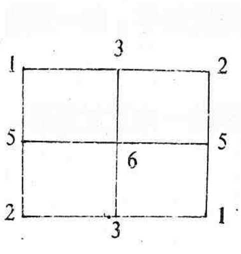


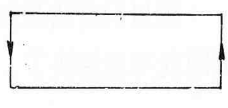
M

問1 試求莫比烏斯帶M的尤拉示性數 $\chi(M)$

解：因爲在一曲面劃分成多面形，使每一面的稜邊數相等，每一頂點的度亦相同，則稱爲此種劃分爲正規剖分。

莫比烏斯帶 (Möbius band) 的四邊正規剖分圖：

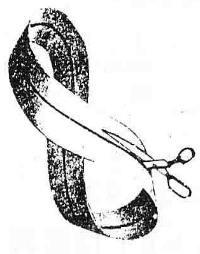




故莫比烏斯帶的尤拉示性數

$$\begin{aligned}\chi(M) &= N_0 - N_1 + N_2 \\ &= 6 - 10 + 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

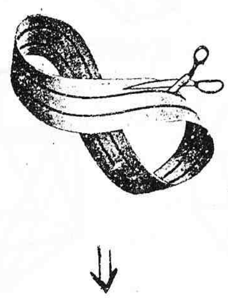
問2 如果將帶中間畫一直線，沿着這直線來將這帶剪開結果剪出來的是不是兩條帶？何故？

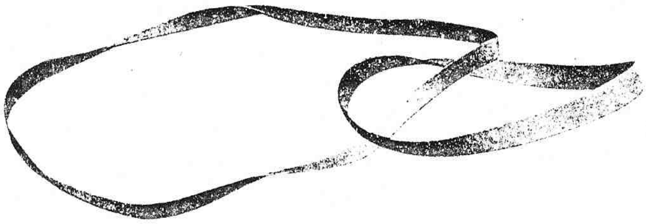


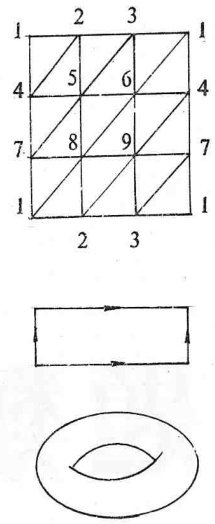
解：若沿中間線剪開時，所得的仍然是一帶子，而不是兩條，但只得原來的一半濶，長却是兩倍。

理由是：莫比烏斯帶只有一稜邊，經二等分後，增加一稜邊，因而也就增加了一面。

值得注意的是在莫比烏斯帶上畫三等分線兩條，依分線剪開它的結果既不是三條，也不是一條，而是纏在一起的兩條，其中一條雙扭的環形二面帶，另一條則是單扭簡單的莫比烏斯帶。







環面的尤拉示性數

$\chi(T^2) = N_0 - N_1 + N_2$

$= 9 - 27 + 18$

$= 0$

例7 圓圈餅（即環面 T^2 ）的尤拉示性數

$\chi(T^2) = 0$

解：(1)今將環面 T^2 三角正規剖分如下圖：

參 考 資 料

1. 林義雄、黃文達、洪萬生：線性代數導引，悉大圖書有限公司，68 年。
2. 林福來：離散數學初步，九章出版社。
3. 黃光明：組合學漫談，數學傳播第一卷第四期 66 年。
4. 簡蒼調：數學科的輔導發現學習法模式，數學傳播第三卷第四期，68 年。
5. 王進賢：且談一筆畫和一線牽，數學傳播第二卷第一期 66 年。
6. 傅溥譯，數學漫談，美亞書版股份有限公司，60 年。
7. DONALD W. BLAKETT: Elementary Topology 民 60 年。

（本文作者現任敎於延平中學）