一些不可能無限延長的數學遊戲

Martin Gardner 原著
林克瀛 改寫

嘉德納（Gardner）是「科學的美國人」雜誌中「數學遊戲」專欄的執筆人，他雖然在兩年前退休，但每年仍然要爲雜誌寫一兩篇文字。今年八月他介紹一些新的數學遊戲，根據遊戲的規則，在表面上看來好像可以無限制的拖延下去，但實際上都非結束不可。

假定現在你手上有一個籃子，裏面裝了一百個蛋，另外還有許多空匣子。你的工作是把所有的蛋放到匣子裏。每一個步驟是把一個蛋從籃子裏取出放入匣子內或者由匣子中取出放回籃子裏。遊戲的規則是這樣的：每逢連續兩次把蛋放入匣子中之後，要把一個蛋由匣子中取出放回籃子裏。顯然最後所有的蛋都放在匣子裏。

現在假定這個籃子可以裝得下任何有限數目的蛋。不過不論開始時蛋的數目有多大，一旦確定之後，完成這項工作所需的步驟的數目必定是有限的。

如果把規則修改成你可以在任一步驟把任何數目的蛋由匣子內取出放回籃子裏，情形就完全變了。即使開始時籃子裏只有兩個蛋，如果每一次取出一個後下一次又放回去，這個遊戲就永遠延長下去了。現在我們考慮一些類似的數學遊戲，它們的規則在表面上看來似乎是可以使得遊戲可以無限制的拖延下去，但實際上却不可避免的非在有限的步驟下完成不可。

第一個例子是從邏輯學家史慕揚（Smullyan）的一篇論文中選出來的。假定你擁有可以無限制供應的撞球，每一個球上有一個正整數，並且對每一個整數而言，有無限多個球上都有這一個數字。另外你還擁有一個匣子裝了有限個記上數字的球，你的目的是把這個匣子裏的球全部拿出來。每一步驟是取出一個球並同時放入任何有限多的球，但放入的球上的數字必須比取出的球上的數字小。唯一的例外是一號球，由於一是最小的正整數，所以取出一個一號球時不可能同時放入其他的球。

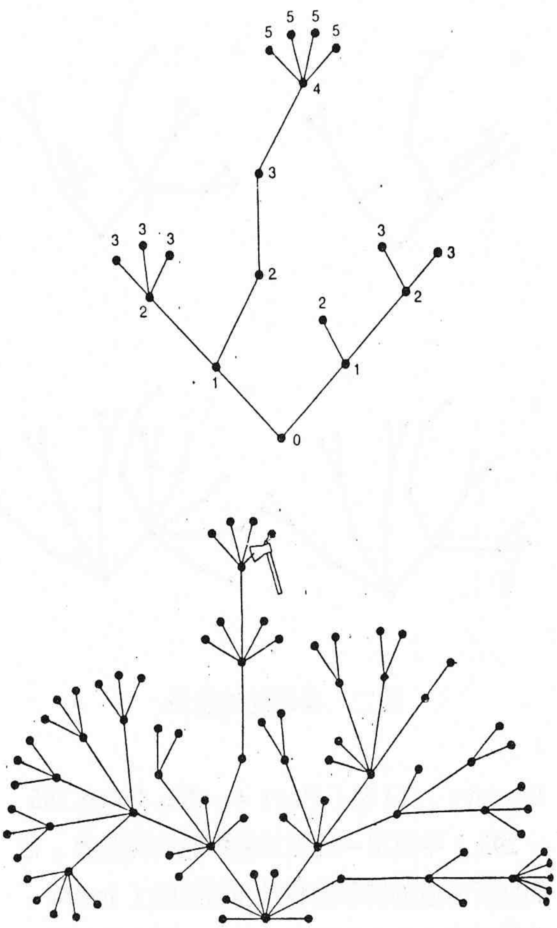
要在有限次步驟中把匣子裏的球全部取完

是很容易的。例如每一次取出一個球時，只要不是一號球，就同時放入一個一號球，這樣最後匣子裏只剩下有限多個一號球，然後每一次取出一個一號球就好了。但遊戲的規則允許你取出一個球時可以同時放進去有限多個數字比較小的球。例如你可以取出一個一千號的球，但又同時放入十億個 999 號球，一百億個 998 號球，一千億個 997 號球等等。於是每一步驟都可能使匣子裏的球數目大大增加。表面上看來，這個遊戲似乎是可以無限制的拖延下去，但史慕揚在一篇論文「樹形圖和球戲」(Trees and ball games) 中證明了這種遊戲不可能永遠繼續下去，原文發表在紐約科學院學報(Annals of the New York Academy of Sciences) 321 卷 86－90 頁， 1979 。他提出幾個證明，其中一個用歸納法很簡單，是這樣的：

如果匣子裏全是一號球，顯然每次取出一個直到匣子空了爲止。假定匣子裏的球中數字最大是二。於是開始時我們有了有限多個二號及一號球。我們不可能不斷的丟掉一號球，所以不久之後必然要丟掉一個二號球，於是二號球的總數減少了一個，但一號球的總數可能比開始時增加了。然後我們不可能只丟掉一號球，遲早必須再丟掉下一個二號球，因此可知經過有限次步驟後，匣子裏只剩下一些一號球。現在如果匣子裏最大的數字是三，則同理我們不可能不斷的丟掉一號或二號球，遲早要丟掉第一個三號球，一直到把所有的三號球丟完。以後依此類推。

史慕揚也用樹形圖(tree graph)來證明。樹形圖是由許多兩頭有接點的線段所連接起來的圖形中的一種。其中有一點稱爲樹根，圖形上任何一點和樹根之間有一條唯一的路徑連接。球戲開始時匣子裏放了許多個球，可以用一個樹形圖來代表，把每一個球畫成一個點，點旁記上數字，每一個點和樹根相連。當某一個球取出而代以另一批數字較小的球時，就在代表取出的球的那一點上方伸出若干樹枝，其數目和放入的球數相同，並且在新的端點(代表放入的球)旁證明球上的數字。像這樣這棵樹逐漸向上長，樹枝的末端代表在每一步驟匣子裏所放的球。

史慕揚證明如果這棵樹會無限制的長大，也就是說有無限個末端(endpoint)，則至少有一根樹枝會無限制的向上生長。但這是不可能的，因爲沿這根樹枝往上的每一個節點旁的數字必須逐漸減小，因此減到一時就必須停止生長。

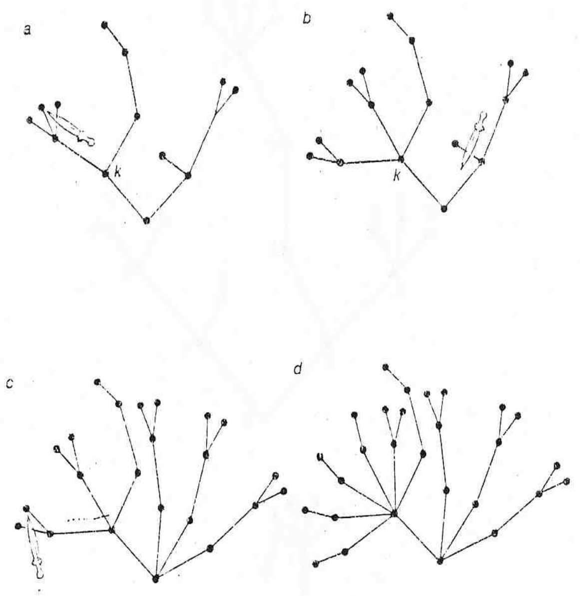


圖一 剪樹

史慕揚的定理和一個關於有限樹形圖的無限集合的重要定理有密切關係，此定理首先由 Kruskal 證明，後來又由 Nash-Williams 把證

明簡化。史慕揚的球戲的一個特殊例子如圖一所示，上圖是一棵樹，樹上的每一個節點都依照由樹根起的次序編號，我們每一次可以剪下任何一個末端（包括與此端點相連的一小段樹枝如下圖所示），並且可以在比這一端點順序為低的任何節點上增加新的樹枝（如下圖所示）。這樣一來剪去一根樹枝的結果可能使這棵樹生長得更加茂盛，樹枝比以前長得更多。但根據史慕揚定理，這棵樹越剪越矮，最後不得不整棵砍掉。

Kirby 和 Paris 在去年七月出版的倫敦數學會刊（Bulletin of London Mathematical



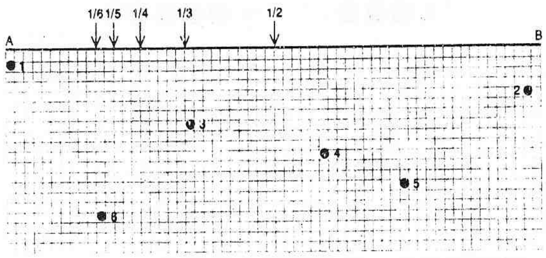
圖二　多頭蛇的生長

Society）14卷（Part 4，No.49，pp.285—293）中提出一個更加複雜的砍樹遊戲。他們把所考慮的樹形圖稱為多頭怪蛇（hydra，希臘神話中的九頭怪蛇，斬去一頭立生二頭，後為赫丘利Hercules 所殺）。樹的末端是蛇頭，赫丘利要把所有的怪物的頭全部砍下。當一個蛇頭（包括相連的那一段頸）被砍下之後，如圖二所示，立刻在被砍處下面的一個節點（以k表示）長出一個或者多個樹枝生來，新的樹枝的形狀和由 *k* 往上的那一段樹完全相同。圖二 a 圖砍去一頭後變成 b 圖，再砍二次最後成為 d 圖。由圖可以看出大力士的工作越來越難，因為他砍第二刀後，又長出二大根樹枝，砍第三刀後又長出三根樹枝來。如此類推，似乎他的工作永遠如吳剛在月亮上伐桂樹一樣完工不了。但這二位數學家利用了英國邏輯學家哥斯坦（Goodstein）所發現的一個很出色的整數論上的定理，證明了不論大力士如何斬蛇，最後這條蛇必定縮為許多直接連接到樹根上的蛇頭，於是大力士只需要一個個把剩下的頭斬下即可完成工作。

另一個看來似乎永不會結束的遊戲是所謂十八點問題。開始時你有一條線段，在中間任何地方放一個點（除了正當中的位置外），下一步再放一個點，使得這二個點分別落在線段的左及右半之內（這兩半視為閉區間（closed interval），即區間的二端不算是「內部」。）接下來再放第三個點，使這三個點分別落在原線段三等分的三個區間之內，以下依此類推。現在可以看出頭兩個點不能亂放，例如若這二點放在線段中央部份彼此靠得很近時，遊戲就結束了，因為不可能再放第三個點。現在試問如果你選擇點的位置十分小心，你在線段上可以放多少點？

表面上看來，由於線段上有無限多的點，答案似乎是無限的，但驚人的是不論你如何嘗試，最多只能放十七個點！也就是說第十八個點依照遊戲的規則是不可能放的。圖三是一個放六個點的例子，一般情形想放十個點都不容易。這個不尋常的問題首先由波蘭數學家 Steinhaus，在一本書「初等數學中的一百個問題」（One handred problems in elementary mathematics）的第六及七題中提到。他本人在書中提供一個十四點的解，並在附註中指出華慕士（Warmus）曾證明十七點是極限。第一個發表出來的證明出現在 1970 五月，由Berlekamp及Graham 在整數論期刊上發表（Jour. Number Theory，Vol. 2，No. 2，pp. 152—161）。華慕士是華沙的數

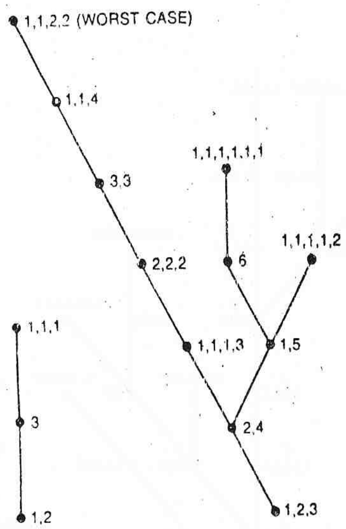
學家，他一直到六年後才在同一期刊上發表了他的更短的證明（Vol.8，No.3，pp. 260—263，1976 八月）。他提供了一個十七點的



圖三　在線 A—B 上放置六個點的一種方法

解，並指出共有768 種變化。

最後一個例子是一種紙牌遊戲，來源不明，嘉德納本人是由Graham那兒聽到的，據說歐洲數學家稱之為保加利亞單人紙牌戲（Bulgerian solitaire）。無窮級數 1 + 2 + 3 + …的任意部份和稱為三角數，因為可以把它看成一個沿正三角形排列的點之總數（例如玩保齡球時的十個瓶子，或撞球時的十五個球就是排成三角形）。這個遊戲是以和某一三角數相同張數的紙牌開始，一副樸克牌有 52 張，所能得的最大三角數是 45（由1加到9）。把 45 張紙牌隨你的意分為若干份，每一份的張數不限。例如分為 45 份，每份一張，或者根本只有一份。然後一再依照下面所說的步驟重複。由每一份中任取一張牌放在一起另成一份。由於變化完全不規則，表面上看來似乎很不容易達到下列的目標：即最後出現九份，其中有一份只有一張牌，一份是二張，等等，最多的一份是九張。遊戲到此結束，因為如果你再重覆下去，每一次都出現同樣的情形。令人驚奇的是不論起初的分配如何，經有限次之後必然會出現這種情形。據說在 1981 丹麥數學家 Brandt 首先證明了這個現象，但嘉德納自己尚未讀過證明也不知道這個證明發表了沒有。

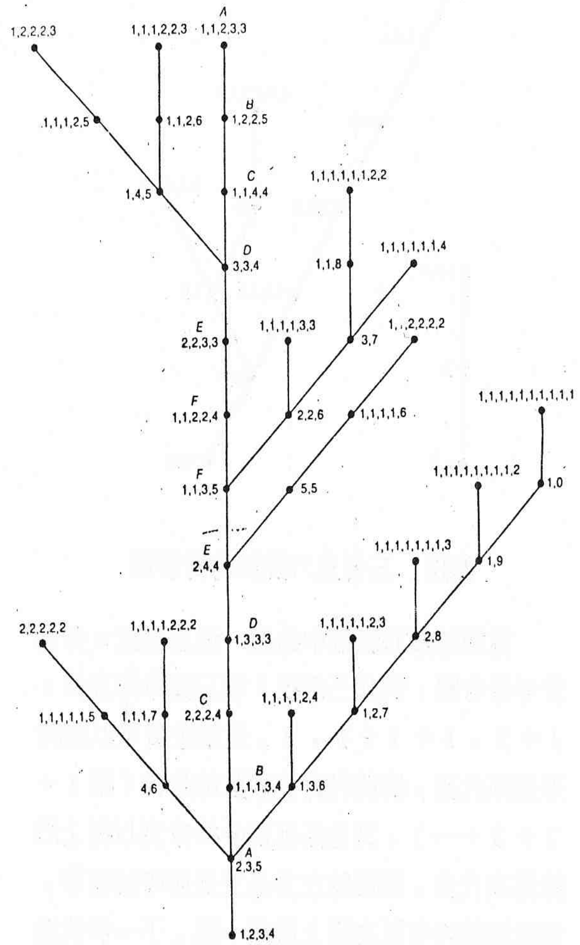


圖四　三張及六張牌的樹形圖

這個遊戲和數論中的把一個正整數 n 分為若干份有關，例如三角數 3 有三種分的方法：1 + 2，1 + 1 + 1，3。這種遊戲可以用樹形圖來代表，樹根代表連續數的分法（即 1 + 2 + 3 +…），其他各種劃分法分別以樹上的節點來代表。圖四的左方是三張牌時的情形，遊戲開始時可以在樹上的某一點，下一步就沿樹枝往下移一點，直到樹根為止，圖四右方是六張牌的情形，比較複雜一些，一共有十一個點，最高點離樹根有六個步驟。一般推測是對一個形如$\frac{1}{2}k(k+1)$的三角數而言，k 為正整數，遊戲中所需的步驟最多不超過$k(k-1)$次。去年史丹佛大學計算機專家Knuth請學生以計算機驗算這個猜想，證實當 k 不超過十時這個猜測成立，但目前還不知道一般情形是否成立。

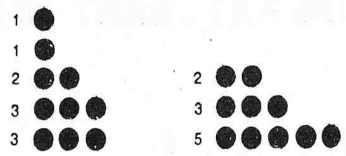
圖五是十張牌（$k=4$）時的保加利亞牌戲的樹。樹頂有三個最壞的情形，需要十二步才到達樹根。這棵樹共有十二個端點，它們具有以下的公有特性，即若把十張牌分為 p 份，每一份最多有 n 張牌，則 $p-n \geq 2$。這些劃分法稱為伊甸劃分（Eden partition），因為除非你由它開始，否則在遊戲中永遠不會碰到

這些情形。（伊甸園是聖經中亞當被逐出永遠不准回來的果園。）



圖五　十張牌的保加利亞樹

圖六左圖以圓點來代表把十劃分爲 1，1，2，3，3。此圖若沿左下到右上的對角線轉 180 度後成爲右圖，相當於 2，3，5 的分配，這二圖稱爲共軛（ conjugate ）。有些情形旋轉後不變，稱爲自共軛，圖五一共只有二個這種情形，就是樹根及 1，1，1，2，5。在圖五的主要樹幹上，每一對共軛的劃分法以同一英文字母表示，可看見有一個上下對稱的有趣情形。根據目前已經分析過的情形，似乎一切保加利亞樹的主要樹幹都有這種對稱情形。如果這種猜測是對的，則只要把樹根的劃分法中最大的一份牌取出一張就立即得到



圖六　二個共軛的劃分

樹頂的劃分。例如圖五中樹根是 1，2，3，4。樹頂是 1，1，2，3，3。也就是說把 4 拆爲 1 與 3。並且由此可算出共需 $k(k-1)$ 步來由樹頂落到樹根。

若有 55 張牌（ $k = 10$ ），則共有 451，276 種方法來分配，要畫出保加利亞樹是很麻煩的。甚至只有十五張牌時，也需要計算機幫助來畫出一棵有 176 個點的樹。這些點的數目是怎樣計算的？這是一個長而有趣的故事。先討論有次序的劃分，例如 3 有 4 種分法：1 + 2，2 + 1，1 + 1 + 1，及 3，總數是 2^{n-1}。但若不計次序，即把 2 + 1 和 1 + 2 視爲同一種劃分法，則總數計算起來是難以想像的困難。一直到近代才找到一個當 n 很大時的一個嚴格的漸近公式（ asymptotic formula ）。英國數學家哈地Hardy和他的印度朋友數學天才拉曼紐揚Ramanujan 合作得到一項重大的突破，在 1937 再由Rademacher 修正後得到完全正確的公式，結果是一個非常複雜的無窮級數，其中包括了 π，平方根，甚至雙曲函數（ hyperbolic function ）的微分導函數！數學家安得魯（ Andrews ）在他關於劃分論的標準教科書中稱之爲「不可思議的恆等式」及這門學問中的「最偉大的成就之一」。

—本文作者任敎清大物理系—